Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 20 (1920), p. 35-39
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__35_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1 84.

(1897, p. 279 ; 1917, p. 356.)

Si, à deux tétraèdres, dont les sommets sont les huit points communs à trois quadriques, on circonscrit deux quadriques bitangentes, dont une des coniques communes *est dans un plan fixe, le plan de l'autre passe par un point fixe.* E. Duporcq.

Solution
Par M. R. Bouvaist.

On connaît le théorème suivant, dû à Hesse : *Si l'on désigne par* $A_i (i = 1, 2, \ldots, 8)$ *les points communs à trois quadriques, si l'on partage ces points* A_i *en deux groupes de quatre points, les deux tétraèdres ayant respectivement pour sommets les points de chacun de ces groupes sont conjugués à une même quadrique* Σ.

Il en résulte que les sphères circonscrites à ces deux tétraèdres sont orthogonales à la sphère de Monge de Σ, leur plan radical passera par le centre ω de Σ, d'où l'on conclut immédiatement que si deux quadriques, circonscrites à chacun de ces tétraèdres, ont une conique commune située dans un plan π_1, le plan π_2 de leur seconde conique d'intersection passera par le pôle ω_1 de π_1 par rapport à Σ.

1785.

(1898, p. 579 ; 1917, p. 356.)

Étant donné un arc de courbe plane, on considère la perpendiculaire abaissée du barycentre du périmètre de cet arc sur la corde qui en joint les extrémités; enveloppe des droites qui correspondent ainsi à des arcs de courbe parallèles à un arc de courbe donné. E. Duporcq.

Solution
Par M. L. Varchon.

Soit OA l'arc donné. Choisissons sur la normale un sens positif et prenons comme axe Ox, la normale positive en O et comme axe Oy la tangente en O.

Soit $M(x, y)$ un point de la courbe. Posons $\text{arc}\,OM = s$, et désignons par θ l'angle de la normale en M avec Ox, avec la condition que $\theta = 0$ pour $s = 0$. Désignons aussi par l, la longueur de l'arc OA ; par a, b, les coordonnées du point A ; par ξ, η, celles du barycentre de l'arc, et par α, l'angle de la normale en A avec Ox.

Soit O'A' l'arc parallèle à OA obtenu en portant sur les normales orientées une longueur ρ ; nous désignerons les éléments de O′A′ par les mêmes lettres que les éléments correspondants de OA, mais en les accentuant. On a les relations connues :

$$x' = x + \rho\cos\theta, \qquad y' = y + \rho\sin\theta,$$
$$ds' = ds + \rho\, d\theta,$$
$$l' = l + \rho\alpha.$$

On en déduit

$$l'\xi' = \int_{O'A'} x'\, ds'$$
$$= \int_{OA} x\, ds + \rho\int_{OA}\cos\theta\, ds + \rho\int_{OA} x\, d\theta + \rho^2\int_{OA}\cos\theta\, d\theta$$

et

$$l'\eta' = \int_{O'A'} y'\, ds'$$
$$= \int_{OA} y\, ds + \rho\int_{OA}\sin\theta\, ds + \rho\int_{OA} y\, d\theta + \rho^2\int_{OA}\sin\theta\, d\theta.$$

Posons

$$A = \int_{OA} x\, d\theta, \qquad B = \int_{OA} y\, d\theta.$$

En tenant compte des relations

$$dx = -\sin\theta\, ds, \qquad dy = \cos\theta\, ds,$$

on obtient immédiatement l'expression des coordonnées du barycentre de O′A′ :

$$\xi' = \frac{l\xi + (A + b)\rho + \rho^2\sin\alpha}{l + \alpha\rho},$$
$$\eta' = \frac{l\eta + (B - a)\rho + \rho^2(1 - \cos\alpha)}{l + \alpha\rho}.$$

L'équation de la perpendiculaire abaissée de ce point sur la corde O′A′ est, en l'ordonnant par rapport à ρ,

$$[(\alpha x - A)(1 - \cos\alpha) - (\alpha y - B)\sin\alpha]\rho^2$$
$$- \{a(\alpha x - A) + b(\alpha y - B) - l[(x - \xi)(1 - \cos\alpha) - (y - \eta)\sin\alpha]\}\rho$$
$$- l[a(x - \xi) + b(y - \eta)] = 0.$$

En exprimant que cette équation en ρ admet une racine double, on aura immédiatement l'équation de l'enveloppe cherchée :

$$\begin{aligned}\{ & a(\alpha x - \mathrm{A}) + b(\alpha y - \mathrm{B}) \\ & \quad - l[(x-\xi)(1-\cos\alpha) - (y-\eta)\sin\alpha]\}^2 \\ & \quad + 4l[a(x-\xi) + b(y-\eta)] \\ & \quad \times [(\alpha x - \mathrm{A})(1-\cos\alpha) - (\alpha y - \mathrm{B})\sin\alpha] = 0.\end{aligned}$$

On peut l'écrire sous la forme plus simple

$$\begin{aligned}\{ & a(\alpha x - \mathrm{A}) + b(\alpha y - \mathrm{B}) \\ & \quad - l[(x-\xi)(1-\cos\alpha) - (y-\eta)\sin\alpha]\}^2 \\ & \quad + 4l[b(1-\cos\alpha) - a\sin\alpha] \\ & \quad \times [(\alpha\xi - \mathrm{A})y - (\alpha\eta - \mathrm{B})x + \mathrm{A}\eta - \mathrm{B}\xi] = 0,\end{aligned}$$

sous laquelle on reconnaît une parabole.

Autre solution par M. R. BOUVAIST.

1811.

(1898, p. 484 ; 1917 p. 357.)

Soient a et b deux nombres positifs premiers entre eux ; n un nombre entier positif quelconque. Démontrer que le nombre des solutions entières non négatives de l'équation

$$ax + by = n$$

est égal à

$$\mathrm{E}\left(n\frac{a'}{a}\right) + \mathrm{E}\left(n\frac{b'}{b}\right) - n + 1 ;$$

a' est l'associé du nombre b suivant le module a, c'est-à-dire le nombre positif $< a$ satisfaisant à la congruence

$$ba' \equiv 1 ;$$

semblablement, b' est l'associé de a suivant le module b; enfin $\mathrm{E}(x)$ désigne le plus grand nombre entier contenu dans la quantité x. J. FRANEL.

SOLUTION

Par M. FAUCHEUX.

$ab' + a'b - 1$ est multiple de a et de b, par suite de ab; $ab' + a'b$ est de la forme $pab + 1$, p étant un entier positif; chacun des nombres ab' et $a'b$ étant plus petit que ab, $p = 1$ et

$$ab' + (a' - a)b = 1.$$

On obtient une solution entière de l'équation proposée en prenant

$$x_0 = nb'; \qquad y_0 = n(a' - a).$$

La solution générale est

$$x = nb' + kb; \qquad y = n(a' - a) - ka,$$

et le problème revient à trouver combien de valeurs de k rendent x et y positifs ou nuls.

x est positif ou nul pour

$$k \geqq -\mathrm{E}\left(n\frac{b'}{b}\right);$$

y est positif ou nul pour

$$k \leqq \mathrm{E}\left(n\frac{a'}{a}\right) - n,$$

et l'on voit facilement qu'il existe

$$\mathrm{E}\left(n\frac{a'}{a}\right) + \mathrm{E}\left(n\frac{b'}{b}\right) - n + 1$$

valeurs de k satisfaisant aux conditions de l'énoncé.