NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ANDRÉ LÉVÊQUE

Démonstration géométrique du théorème de Liouville sur le groupe isogonal de transformations dans l'espace

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 20 (1920), p. 356-358

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__356_0>

[P¹3a]

DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE DU THÉORÈME DE LIOUVILLE SUR LE GROUPE ISOGONAL DE TRANSFORMATIONS DANS L'ESPACE (¹);

PAR M. LE LIEUTENANT ANDRÉ LÉVÊQUE,
Élève à l'École Polytechnique.

THÉORÈME. — *Dans l'espace, le seul groupe de transformations ponctuelles qui conserve les angles est celui des similitudes et des inversions.*

Considérons en effet deux espaces E_1 et E_2 qui se correspondent point par point, et par suite ligne par ligne, surface par surface. Supposons que l'angle de deux lignes concourantes quelconques de E_1 soit égal à l'angle des deux lignes concourantes homologues de E_2.

Considérons dans E_1 le système triple orthogonal formé par un système de trois directions (P_1, P_2 et P_3) de plans rectangulaires. Il lui correspond dans E_2 un système triple orthogonal (S_1, S_2, S_3). Dans E_1, à la direction P_1 correspondent une infinité de directions P_2 et P_3; donc, dans E_2, à la famille S_1 de surfaces correspondent une infinité de familles S_2 et S_3. Comme les surfaces S_2 et S_3 coupent une surface S_1 quel-

---

(¹) Deux démonstrations basées sur le théorème de Dupin, ont déjà été données en 1889 par M. E. Goursat (*Annales de l'École Normale; Mémoires sur les substitutions orthogonales et les divisions régulières de l'espace*) et en 1900 par M. G. Darboux (*Archiv der Mathematik und Physik*, 3ᵉ série, I; *Sur les transformations conformes de l'espace à trois dimensions*).

A. B.

conque suivant ses lignes de courbure, il en résulte que cette dernière admet une infinité de systèmes de lignes de courbure; tous ses points sont donc des ombilics. Les surfaces S_1 (et par suite S_2 et S_3) sont donc nécessairement des *plans* ou des *sphères*.

Premier cas. — Si toutes les surfaces S_1, S_2, S_3 sont des *plans*, et cela quel que soit le système P_1, P_2, P_3 considéré, alors les deux espaces E_1 et E_2 se correspondent plan par plan, et par suite droite par droite. Cette correspondance homographique, conservant les angles, est une *similitude* (directe ou inverse).

Deuxième cas. — Si les surfaces S_1, S_2, S_3 sont en général des *sphères*, examinons comment ces sphères seront distribuées dans l'espace E_2.

Une surface (S_1) quelconque est coupée par les deux familles S_2 et S_3 suivant deux familles C_1 et C'_1 de cercles orthogonaux, engendrées par l'intersection de (S_1) avec tous les plans passant par chacune des droites Δ_1 et Δ'_1 conjuguées par rapport à (S_1). Par exemple, les cercles C_1 sont tous les cercles de (S_1) passant par les deux points A_1 et B_1 (A_1 et B_1 étant réels ou imaginaires conjugués) d'intersection de (S_1) avec Δ_1. Ils correspondent dans E_2 à une série de parallèles du plan P_1 dans E_1. Donc ils ne doivent avoir aucun point commun à moins qu'ils ne se rencontrent sous des angles tous nuls; cette condition devant être réalisée pour C'_1 aussi bien que pour C_1 entraîne, pour Δ_1 et Δ'_1, la nécessité d'être deux tangentes rectangulaires en un même point O de (S_1) [1]. Alors, tous les cercles C_1

[1] On peut montrer autrement la nécessité pour tous les cercles C_1 et C'_1 de passer par un même point O : en effet, puisqu'à une droite quelconque D de P_1 correspond un cercle C de (S_1), le cercle C doit couper tous les cercles C_1 *sous le même angle* (de

et C'_1 passent par O ; il en est de même de toutes les sphères S_2 et S_3, et par suite des sphères S_1.

Il résulte de tout ceci qu'*à un plan quelconque de* E_1 *correspond une sphère de* E_2 *qui passe par un point fixe* O (cette sphère pouvant exceptionnellement être un plan). En effet, nous venons de le démontrer pour trois directions de plans rectangulaires. La démonstration précédente s'étend facilement au cas d'un plan quelconque de E_1, au moyen de la remarque suivante : à un plan qui passe par l'intersection de deux autres dans E_1 correspond dans E_2 une sphère qui passe par l'intersection de deux autres. Alors, un plan P perpendiculaire à P_1, passant par l'intersection de deux plans P_2 et P_3, correspond à une sphère qui passe par O ; de même, un plan Π, passant par l'intersection de P et d'un plan P_1 quelconque, correspond à une sphère qui passe en O : or le plan Π est arbitraire.

La démonstration s'achève dès lors sans aucune difficulté : dans l'espace E_2, faisons une inversion quelconque de pôle O : nous obtenons un nouvel espace, E'_2, qui correspond point par point à l'espace E_1, avec conservation des angles ; mais, les sphères passant par O étant transformées en plans, il en résulte qu'à un plan quelconque de E_1 correspond un plan de E'_2. La correspondance entre E_1 et E'_2 est la même que dans le premier cas ; c'est donc une *similitude*, qui peut être en particulier une égalité directe ou inverse.

C. Q. F. D.

---

même pour tous les cercles C'_1), généralement différent d'un droit ; or il existe toujours un cercle C_1 ou un cercle C'_1 tangent au cercle C, à moins que ce cercle C ne passe à la fois par les deux couples de points communs aux cercles C_1 et aux cercles C'_1 ; ceci n'est possible que si ces points communs sont tous les quatre confondus en un point O ; alors tout cercle de (S_1) passant par O est un cercle C, et réciproquement.