Nouvelles annales de mathématiques

Cl. Servais

Un théorème général sur les complexes

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 20 (1920), p. 347-355

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__347_1>

[N¹1a]

UN THÉORÈME GÉNÉRAL SUR LES COMPLEXES;

PAR M. CL. SERVAIS,
Professeur à l'Université de Gand.

1. *Les cônes d'un complexe d'ordre n, relatifs aux sommets A_1, A_2, A_3, ..., A_p d'un polygone gauche, déterminent sur les diagonales $A_p A_2$, $A_1 A_3$, $A_2 A_4$, ..., $A_{p-1} A_1$ qui leur sont opposées respectivement les ponctuelles*

$$(B_1),\quad (B_2),\quad (B_3),\quad \ldots,\quad (B_p)$$

telles que l'on a l'égalité

$$(a)\qquad (B_1)_{p,2}.(B_2)_{1,3}.(B_3)_{2,4}\ldots.(B_p)_{p-1,1} = (-1)^{pn},$$

la notation $(B_k)_{k-1,k+1}$ indiquant le produit des rapports de section $\frac{A_{k-1}B_k}{A_{k+1}B_k}$ de tous les points B_k de la ponctuelle (B_k) relativement aux origines A_{k-1}, A_{k+1} de la diagonale $A_{k-1}A_{k+1}$ opposée au sommet A_k (¹).

Ce théorème est vrai pour un triangle $A_1 A_2 A_3$, car dans le plan de ce triangle les droites du complexe issues de A_1, A_2, A_3 sont tangentes à la courbe du complexe. Celle-ci étant de classe n, on a, d'après le corrélatif du théorème de Carnot :

$$(B_1)_{3,2},\ (B_2)_{1,3},\ (B_3)_{2,1} = (-1)^n.$$

(¹) On suppose que les côtés $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, ..., $A_p A_1$ du polygone ne sont pas des rayons du complexe considéré.

Il suffit donc d'établir que le théorème supposé vrai pour un polygone de $p-1$ sommets $A_1, A_2, \ldots, A_{p-1}$ l'est nécessairement pour un polygone de p sommets.

Les cônes (A_p), (A_{p-1}), (A_1) du complexe déterminent sur les côtés $A_{p-1}A_1$, A_1A_p, A_pA_{p-1} du triangle $A_pA_{p-1}A_1$ respectivement les ponctuelles (B_p), (B'_{p-1}), (B'_1) et l'on a

$$(B_p)_{p-1,1}.(B'_{p-1})_{1,p}.(B'_1)_{p,p-1} = (-1)^n.$$

Le cône (A_1) du complexe détermine sur les côtés A_pA_2, A_2A_{p-1}, $A_{p-1}A_p$ du triangle $A_{p-1}A_pA_2$ les ponctuelles (B_1), (B''_1), (B'_1) : elles sont situées sur la section du cône (A_1) par le plan $A_{p-1}A_pA_2$ et, d'après le théorème de Carnot, on a

$$(B_1)_{p,2}.(B''_1)_{2,p-1}.(B'_1)_{p-1,p} = 1.$$

Le cône (A_{p-1}) du complexe détermine sur les côtés $A_{p-2}A_p$, A_pA_1, A_1A_{p-1} du triangle $A_{p-2}A_pA_1$ les ponctuelles (B_{p-1}), (B'_{p-1}) (B''_{p-1}) et l'on a de même

$$(B_{p-1})_{p-2,p}.(B'_{p-1})_{p,1}.(B''_{p-1})_{1,p-2} = 1.$$

Les cônes (A_1), (A_2), (A_3), $\ldots$, (A_{p-1}) du complexe déterminent sur les diagonales $A_{p-1}A_2$, A_1A_3, A_2A_4, $\ldots$, $A_{p-2}A_1$ du polygone $A_1A_2A_3\ldots A_{p-1}$ les ponctuelles

$$(B''_1), \quad (B_2), \quad (B_3), \quad \ldots, \quad (B''_{p-1})$$

et l'on a par hypothèse

$$(B''_1)_{p-1,2}.(B_2)_{1,3}.(B_3)_{2,4}\ldots.(B'_{p-1})_{p-2,1} = (-1)^{(p-1)n}.$$

Les quatre égalités précédentes conduisent à

$$(B_1)_{p,2}, (B_2)_{1,3}, (B_3)_{2,4}, \ldots, (B_p)_{p-1,1} = (-1)^{pn};$$

le théorème est donc démontré.

2. Dans le cas d'un complexe linéaire, la démonstra-

tion uniquement basée sur les théorèmes de Ceva et de Ménélaüs est purement géométrique. Du théorème (n° 1) on déduit la propriété suivante :

Si un polygone $A_1 A_2 A_3 \ldots A_p$ *est inscrit dans une courbe gauche dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire* (en particulier une cubique gauche), *les plans osculateurs aux sommets* A_1, A_2, A_3, ..., A_p *rencontrent respectivement les diagonales opposées* $A_p A_2$, $A_1 A_3$, $A_2 A_4$, ..., $A_{p-1} A_1$ *en des points* B_1, B_2, B_3, ..., B_p *tels que*

$$\frac{A_p B_1}{A_2 B_1} \frac{A_1 B_2}{A_3 B_2} \frac{A_2 B_3}{A_4 B_3} \cdots \frac{A_{p-1} B_p}{A_1 B_p} = (-1)^p.$$

Si l'on considère le complexe linéaire spécial dont les rayons rencontrent une droite fixe l, on a la propriété :

Les sommets A_1, A_2, A_3, ..., A_p *d'un polygone gauche sont projetés d'un axe* l, *respectivement sur les diagonales opposées* $A_p A_2$, $A_1 A_3$, $A_2 A_4$, ..., $A_{p-1} A_1$ *en des points* B_1, B_2, B_3, ..., B_p *tels que*

$$\frac{A_p B_1}{A_2 B_1} \frac{A_1 B_2}{A_3 B_2} \frac{A_2 B_3}{A_4 B_3} \cdots \frac{A_{p-1} B_p}{A_1 B_p} = (-1)^p.$$

3. Les droites tangentes à une surface Σ ou rencontrant une courbe Δ, formant un complexe, on peut appliquer le théorème (n° 1) à des cônes circonscrits à la surface Σ ou perspectifs à la courbe (Δ).

4. Le complexe linéaire étant déterminé par cinq rayons, les cas de l'hexagone, du pentagone et du quadrilatère doivent retenir particulièrement l'attention. On peut alors énoncer les propositions réciproques :

a. Étant donné un hexagone gauche $A_1 A_2 \ldots A_6$ *dont les six côtés n'appartiennent pas à un complexe* *linéaire, on marque sur les diagonales* A_6A_2, A_1A_3, A_2A_4, ..., A_5A_1 *respectivement les points* B_1, B_2, ..., B_6. *Si l'on a l'égalité*

$$\frac{A_6B_1}{A_2B_1}\,\frac{A_1B_2}{A_3B_2}\,\frac{A_2B_3}{A_4B_3}\,\frac{A_3B_4}{A_5B_4}\,\frac{A_4B_5}{A_6B_5}\,\frac{A_5B_6}{A_1B_6}=1,$$

les six rayons A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4, A_5B_5, A_6B_6 *font partie d'un même complexe linéaire* (¹).

En effet, les cinq droites A_1B_1, A_2B_2, ..., A_5B_5 ne peuvent appartenir à une même congruence bilinéaire, sinon le complexe linéaire passant par cette congruence et déterminé par le rayon A_1A_2 aurait pour rayons les côtés A_2A_3, A_3A_4, ..., A_6A_1 de l'hexagone, ce qui est contraire à l'hypothèse. Les cinq rayons A_1B_1, A_2B_2, ..., A_5B_5 déterminent donc un complexe linéaire; la droite A_6B_6 est un rayon de ce complexe d'après le théorème (n° 1).

b. Étant donné un pentagone gauche dont les cinq côtés A_1A_2, A_2A_3, ..., A_5A_1 *n'appartiennent pas à une congruence bilinéaire, on marque sur les diagonales* A_5A_2, A_1A_3, A_2A_4, A_3A_5, A_4A_1 *respectivement les points* B_1, B_2, B_3, B_4, B_5. *Si l'on a l'égalité*

$$\frac{A_5B_1}{A_2B_1}\,\frac{A_1B_2}{A_3B_2}\,\frac{A_2B_3}{A_4B_3}\,\frac{A_3B_4}{A_5B_4}\,\frac{A_4B_5}{A_1B_5}=-1,$$

les cinq droites A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4, A_5B_5 *sont des rayons d'une même congruence bilinéaire* (²).

(¹) Ce théorème important, susceptible de nombreuses applications, est dû à M. J. Neuberg, qui l'a obtenu par voie analytique. (Voir *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1912, p. 194-202, Supplément à la livraison juillet, août, *Mathesis*, 1912.)

(²) J. Neuberg, *loc. cit.*

En effet, les quatre droites A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 ne peuvent appartenir à un même système réglé, sinon la congruence bilinéaire passant par ce système et déterminée par le rayon A_1A_2 aurait pour rayons les côtés A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_1 du pentagone; ce qui est contraire à l'hypothèse. Les rayons A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 déterminent donc une congruence bilinéaire et tout complexe linéaire passant par cette congruence a pour rayon la droite A_5B_5 d'après le théorème (n° 1).

c. Si l'on prend respectivement sur les diagonales A_2A_4, A_1A_3 *d'un quadrilatère gauche* $A_1A_2A_3A_4$ *les couples de points* (B_1, B_3), (B_2, B_4) *tels que*

$$\frac{A_4B_1}{A_2B_1}\,\frac{A_1B_2}{A_3B_2}\,\frac{A_2B_3}{A_4B_3}\,\frac{A_3B_4}{A_1B_4}=1,$$

les droites A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4, *appartiennent à un même système réglé.*

En effet, cette égalité peut se mettre sous la forme

$$(A_4A_2B_1B_3)(A_1A_3B_2B_4)=1$$

ou

$$(A_4A_2B_1B_3)=(B_4B_2A_1A_3),$$

par suite les droites A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 sont des rayons d'un même système réglé.

5. *Étant donnés une quadrique* Σ *et un polygone gauche* $A_1A_2\ldots A_p$, *les plans polaires des sommets* A_1, A_2, A_3, …, A_p *rencontrent respectivement les diagonales opposées* A_pA_2, A_1A_3, A_2A_4, …, $A_{p-1}A_1$ *en des points* B_1, B_2, B_3, …, B_p *tels que l'on a l'égalité*

$$\frac{A_pB_1}{A_2B_1}\,\frac{A_1B_2}{A_3B_2}\,\frac{A_2B_3}{A_4B_3}\cdots\frac{A_{p-1}B_p}{A_1B_p}=1.$$

En effet, le théorème est vrai pour un triangle $A_1A_2A_3$;

car, relativement à la conique d'intersection de la quadrique Σ par le plan $A_1A_2A_3$, les polaires des sommets de ce triangle rencontrent les côtés opposés en trois points B_1, B_2, B_3 en ligne droite; on a donc

$$\frac{A_3B_1}{A_2B_1}\,\frac{A_1B_2}{A_3B_2}\,\frac{A_2B_3}{A_1B_3}=1.$$

On démontre comme au n° 1 que le théorème supposé vrai pour un polygone de $(p-1)$ sommets l'est nécessairement pour un polygone de p sommets.

6. *Étant donné un polygone gauche* $A_1A_2\ldots A_p$, *le nombre p de sommets pouvant prendre chacune des valeurs* 3, 4, 5, ..., 9, 10; *on marque respectivement sur les diagonales* A_pA_2, A_1A_3, A_2A_4, ..., $A_{p-1}A_1$ *les points* B_1, B_2, B_3, ..., B_p. *Si l'on a l'égalité*

$$\frac{A_pB_1}{A_2B_1}\,\frac{A_1B_2}{A_3B_2}\,\frac{A_2B_3}{A_4B_3}\cdots\frac{A_{p-1}B_p}{A_1B_p}=1,$$

toute quadrique qui divise harmoniquement $p-1$ *des segments* A_1B_1, A_2B_2, ..., A_pB_p *divise aussi harmoniquement le segment restant.*

En effet, il n'existe pas de quadrique divisant harmoniquement les dix côtés d'un décagone général : dans ce cas, les neuf couples de points conjugués (A_1, B_1) (A_2, B_2), ..., (A_9, B_9) définissent une seule quadrique Σ; sinon on pourrait leur adjoindre le couple de points conjugués (A_1, A_2) pour déterminer une quadrique; mais alors on aurait aussi les couples de points conjugués (A_2, A_3), (A_3, A_4), ..., (A_{10}, A_1), ce qui est contraire à l'hypothèse. La quadrique Σ est donc déterminée et elle est conjuguée au couple de points (A_{10}, B_{10}) d'après le théorème (n° 5).

Si p est inférieur à 10, il existe une infinité de quadriques conjuguées à $(p-1)$ des couples de points

(A_1, B_1), (A_2, B_2), ..., (A_p, B_p), chacune d'elles est conjuguée au couple restant d'après le théorème (n° 5). Le théorème est donc démontré.

Cette généralisation d'un théorème de Hesse, relatif au quadrilatère polaire, est toute différente de l'élégante extension de ce théorème donnée par P. Serret et relative au tétraèdre coupé par une transversale [1].

7. *Étant donné un pentagone gauche* $A_1 A_2 \ldots A_5$, *sur les diagonales* $A_5 A_2$, $A_1 A_3$, ..., $A_4 A_1$, *on marque respectivement les points* B_1, B_2, ..., B_5. *Si l'on a l'égalité*

$$\frac{A_5 B_1}{A_2 B_1} \cdot \frac{A_1 B_2}{A_3 B_2} \cdots \frac{A_4 B_5}{A_1 B_5} = 1,$$

les sphères décrites sur les segments $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, ..., $A_5 B_5$, *comme diamètres ont même centre radical.*

En effet, soient ω le centre radical des quatre sphères $(A_1 B_1)$, $(A_2 B_2)$, $(A_3 B_3)$, $(A_4 B_4)$; P_ω la puissance de ce point relativement à ces sphères; la sphère de centre ω et dont le carré du rayon est égal à P_ω divise harmoniquement les diamètres $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$, $A_4 B_4$. D'après le théorème (n° 6) elle divise harmoniquement le diamètre $A_5 B_5$ de la sphère $(A_5 B_5)$; par suite P_ω est la puissance du point ω relativement à la sphère $(A_5 B_5)$.

Dans le cas du quadrilatère gauche $A_1 A_2 A_3 A_4$, *les sphères* $(A_1 B_1)$, $(A_2 B_2)$, $(A_3 B_3)$, $(A_4 B_4)$ *ont même axe radical.*

8. *Des théorèmes* (n^{os} 4 et 5) *on déduit :*

Les plans polaires des sommets A_1, A_2, ..., A_6 *d'un hexagone général* (n° 4) *relativement à une quadrique* Σ *rencontrent les diagonales opposées*

---

[1] P. SERRET, *Géométrie de direction*, p. 265.

A_6A_2, A_1A_3, ..., A_5A_1 *en des points* B_1, B_2, ..., B_6 *tels que les six rayons* A_1B_1, A_2B_2, ..., A_6B_6 *appartiennent à un même complexe linéaire.*

Les plans polaires des sommets d'un quadrilatère gauche $A_1A_2A_3A_4$ *rencontrent les diagonales opposées* A_2A_4, A_1A_3 *en des points* B_1, B_2, B_3, B_4 *tels que les quatre rayons* A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 *appartiennent à un même système réglé.*

9. Dans le cas où le polygone $A_1A_2 \ldots A_p$ (n° 6) est inscrit dans la quadrique Σ, le conjugué harmonique B'_1 du point B_1 par rapport au couple A_pA_2 est conjugué à B_1 relativement à la quadrique Σ. La droite $A_1B'_1$ est dans le plan polaire du point B_1 ; ce plan passe par la conjuguée de la droite A_pB_1. La droite $A_1B'_1$ est donc la droite menée par le sommet A_1 s'appuyant sur la diagonale opposée A_pA_2 et sur sa conjuguée. En remarquant que les rapports de section $A_pB_1 : A_2B_1$, $A_pB'_1 : A_2B'_1$ sont égaux et de signes contraires, on a le théorème :

Si par chaque sommet d'un polygone gauche $A_1A_2 \ldots A_p$ *inscrit dans une quadrique* Σ, *on mène la droite s'appuyant sur la diagonale opposée et sur sa conjuguée relativement à* Σ, *les* p *droites ainsi obtenues rencontrent respectivement les diagonales correspondantes* A_pA_2, A_1A_3, A_2A_4, ..., $A_{p-1}A_1$ *en des points* B'_1, B'_2, ..., B'_p *tels que*

$$\frac{A_pB'_1}{A_2B'_1}\,\frac{A_1B'_2}{A_3B'_2}\,\frac{A_2B'_3}{A_4B'_3}\cdots\frac{A_{p-1}B'_p}{A_1B'_p} = (-1)^p.$$

10. Des théorèmes (n°s 4 et 9) on déduit :

Si par sommet d'un hexagone général (n° 4) *ou d'un pentagone général* (n° 4) *ou d'un quadrilatère* *gauche inscrit dans une quadrique Σ on mène la droite s'appuyant sur la diagonale opposée et sur sa conjuguée relativement à la quadrique Σ, les six droites ainsi obtenues dans le cas de l'hexagone appartiennent à un même complexe linéaire; les cinq droites dans le cas du pentagone font partie d'une même congruence bilinéaire; les quatre droites dans le cas du quadrilatère gauche sont des rayons d'un même système réglé.*

11. Dans un polygone d'un nombre impair de sommets $A_1 A_2 \ldots A_{2p+1}$, chaque sommet A_x est opposé à un côté du polygone. Ce côté joint les sommets consécutifs A_{x+p}, A_{x+p+1}, l'indice d'un sommet étant diminué de $2p+1$ s'il est supérieur à $2p+1$. Dans le polygone dont les sommets successifs sont : A_{p+2}, A_1, A_{p+1}, A_{2p+1}, A_p, A_{2p}, A_{p-1}, $\ldots$, A_2, la diagonale opposée à un sommet quelconque A_x est précisément le côté $A_{x+p} A_{x+p+1}$ opposé au sommet A_x dans le polygone $A_1 A_2 \ldots A_p$.

Il résulte de là que dans les propriétés qui font l'objet de la présente Note, si le nombre de sommets du polygone est impair, on peut substituer aux diagonales les côtés opposés aux mêmes sommets. Ainsi le théorème (n° 1) devient :

Les cônes d'un complexe d'ordre n, relatifs aux sommets A_1, A_2, $\ldots$, A_{2p+1} d'un polygone d'un nombre impair de sommets, déterminent sur les côtés opposés à ces sommets respectivement les ponctuelles

$$(B_1), (B_2), (B_3), \ldots, (B_{2p+1})$$

telles que l'on a l'égalité

$$(B_1)_{\cdot,+2} + \cdot(B_\cdot)_{p+3,\,+2} \cdots (B_{2p+1})_{\cdot,+1} = (-1)^n$$