R. GARNIER

Deux notes de géométrie vectorielle

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 20 (1920), p. 341-347

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__341_1>

[B12c]

DEUX NOTES DE GÉOMÉTRIE VECTORIELLE [1];

PAR M. R. GARNIER.

I. *La formule d'Euler-Savary* [2]. — Soit Σ une

[1] Les méthodes de la géométrie vectorielle sont encore peu familières à la plupart des étudiants français. C'est pour contribuer à les répandre que nous les avons appliquées ici à deux exemples qui nécessitent souvent, soit de pénibles calculs, soit encore des constructions géométriques assez cachées ou peu rigoureuses. Comme notations, nous avons adopté celles de l'excellent Traité de Burali-Forti et Marcolongo (*Éléments de Calcul vectoriel;* trad. par S. Lattès; Paris, Hermann, 1910).

[2] Au sujet de cette formule, on nous permettra de rappeler la belle démonstration de M. G. Kœnigs (*Bull. Sc. math.*, 2e série, t. XXXI, 1907); par sa simplicité et sa précision, elle devrait être classique.

sphère de centre O et de rayon 1; pour établir la formule d'Euler-Savary sur Σ, nous appliquerons les formules fondamentales de la composition des mouvements à un point mobile M qui coïnciderait constamment avec le point de contact de la courbe (mobile) C avec son enveloppe (fixe) C_1.

1. Soit $\mathbf{t}$ un vecteur unitaire, porté *dans un sens arbitraire* (mais variant avec continuité) par la tangente commune à C et à C_1; désignons par :

$\mathbf{v}_1 = v_1\mathbf{t}$ et $\mathbf{j}_1$ la vitesse et l'accélération (absolues) de M sur C_1;

$\mathbf{v} = v\mathbf{t}$ et $\mathbf{j}$ la vitesse et l'accélération (relatives) de M sur C;

Ω la rotation instantanée, de module ω.

Posons encore

$$I = O + \frac{\Omega}{\omega},$$

$$M = O + \mathbf{r},$$

d'où

$$\mathbf{r} \times \mathbf{t} = 0,$$

et faisons enfin

$$\mathbf{n} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{t}. \tag{1}$$

Ces notations introduites, la formule de la composition des mouvements pour le premier ordre s'écrira

$$v_1\mathbf{t} = (\Omega \wedge \mathbf{r}) + v\mathbf{t}; \tag{2}$$

l'arc de grand cercle IM est donc orthogonal à C et à C_1 en M, et l'on peut poser, en conséquence,

$$\Omega = \omega(\mathbf{r}\cos\lambda + \mathbf{n}\sin\lambda); \tag{3}$$

λ désignera la distance sphérique IM, comptée à partir de M dans la direction $\mathbf{n}$. Multipliée ($\times$) par $\mathbf{t}$, la relation (2) donne alors

$$v_1 = \omega\sin\lambda + v. \tag{4}$$

Appelons enfin $\mathbf{p}$ un vecteur unitaire dirigé suivant la normale principale à C, *dans un sens arbitraire ;* on pourra écrire

$$\mathbf{p} = -\mathbf{r}\sin\rho + \mathbf{n}\cos\rho,$$

$\sin\rho$ désignant le rayon de courbure de C[1] ; et, si l'on affecte d'accents les dérivées par rapport au temps, la première formule de Frenet donnera

$$(5) \qquad \mathbf{t}' = -v\mathbf{r} + v\cot\rho\,\mathbf{n}.$$

2. Écrivons maintenant la relation de composition pour le second ordre, soit :

$$\mathbf{j}_1 = (\Omega' \wedge \mathbf{r}) + (\Omega \times \mathbf{r})\,\Omega - \omega^2\mathbf{r} + 2(\Omega \wedge \mathbf{v}) + \mathbf{j},$$

et multiplions intérieurement les deux membres de la relation par $\mathbf{n}$; nous aurons successivement, d'après les propriétés de l'accélération, les équations (1), (3), (5) et la relation $\mathbf{n} \wedge \mathbf{r} = \mathbf{t}$:

$$\mathbf{j}_1 \times \mathbf{n} = v_1^2\cot\rho_1, \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{n} = v^2\cot\rho,$$

$$\begin{aligned}
(\Omega' \wedge \mathbf{r})\,\mathbf{n} &= \omega\,[(\mathbf{r}'\cos\lambda + \mathbf{n}'\sin\lambda) \wedge \mathbf{r}]\,\mathbf{n}\\
&= -\omega v\cos\lambda + \omega\sin\lambda\,(\mathbf{r}\quad \mathbf{n})\,\mathbf{n}'\\
&= -\omega v\cos\lambda - \omega\sin\lambda\,\mathbf{t} \times \mathbf{n}'\\
&= -\omega v\cos\lambda + \omega v\sin\lambda\cot\rho,
\end{aligned}$$

$$\Omega \times \mathbf{r}.\Omega \times \mathbf{n} = \omega^2\sin\lambda\cos\lambda,$$

$$\mathbf{r} \times \mathbf{n} = 0,$$

$$(\Omega \wedge \mathbf{v})\,\mathbf{n} = \omega v\,[(\mathbf{r}\cos\lambda + \mathbf{n}\sin\lambda) \wedge \mathbf{t}]\,\mathbf{n} = \omega v\cos\lambda ;$$

d'où

$$\begin{aligned}
v_1^2\cot\rho_1 &= \omega v\cos\lambda + \omega v\sin\lambda\cot\rho + \omega^2\sin\lambda\cos\lambda + v^2\cot\rho\\
&= (v\cot\rho + \omega\cos\lambda)(v + \omega\sin\lambda),
\end{aligned}$$

c'est-à-dire, d'après (4),

$$(6) \qquad v_1\cot\rho_1 - v\cot\rho = \omega\cos\lambda.$$

3. En particulier, faisons $M = I$, d'où $\lambda = 0$; $\mathbf{v}_1$

---

(1) De sorte que $O + \mathbf{r} + \mathbf{p}\sin\rho$ désignera le centre de courbure de C.

et $\mathbf{v}$ seront égaux tous deux à

$$\mathbf{w} = \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)',$$

tandis que $\sin\rho_1$ et $\sin\rho$ devront être remplacés respectivement par $\sin\rho_f$ et $\sin\rho_m$, rayons de courbure respectifs de la base et de la roulante. La formule (6) donnera alors

$$(7) \qquad w(\cot\rho_f - \cot\rho_m) = \omega;$$

on aura ensuite, en posant

$$\mathbf{w} \times \mathbf{t} = w\cos\varphi,$$

et en utilisant (1), (3) et (5):

$$\begin{aligned}(8) \qquad w\cos\varphi &= \frac{1}{\omega}(\Omega' \times \mathbf{t}) - \frac{\omega'}{\omega^2}(\Omega \times \mathbf{t}) \\ &= (\mathbf{r}'\cos\lambda + \mathbf{n}'\sin\lambda) \times \mathbf{t} \\ &= v\cos\lambda - \sin\lambda\,\mathbf{n} \times \mathbf{t}' = v\,\frac{\sin(\rho-\lambda)}{\sin\rho}.\end{aligned}$$

Ceci fait, il suffira de rapprocher (4), (7) et (8) pour en déduire

$$\begin{aligned}\cot\rho_1 - \cot\rho &= \frac{\omega}{v}(\cos\lambda - \sin\lambda\cot\rho_1) \\ &= \frac{w}{v}\,\frac{\sin(\rho_1-\lambda)}{\sin\rho_1}(\cot\rho_f - \cot\rho_m) \\ &= \frac{\sin(\rho-\lambda)\sin(\rho_1-\lambda)}{\sin\rho\sin\rho_1}\,\frac{\cot\rho_f - \cot\rho_m}{\cos\varphi},\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\cos\varphi\,[\cot(\rho_1-\lambda) - \cot(\rho-\lambda)] = \cot\rho_f - \cot\rho_m.$$

C'est la formule d'Euler-Savary pour la sphère.

Il importe d'observer que *cette formule est indépendante des conventions de sens adoptées au début:* effectivement, un changement de sens effectué sur $\mathbf{t}$ remplace λ par $-\lambda$, φ par $\pi - \varphi$, ρ_1 et ρ par $\pi - \rho_1$ et $\pi - \rho$; un résultat analogue s'applique à $\mathbf{w}$; enfin, un changement de sens sur $\mathbf{p}$ (ou $\mathbf{p}_1$) remplace ρ par $\pi + \rho$

(ou ρ_1 par $\pi+\rho_1$). Aucune de ces modifications ne change la formule ; la méthode vectorielle, et c'est là son grand avantage, affranchit donc le résultat de toute erreur de signe.

II. *Les surfaces apsidales.* — Soient O le pôle de la transformation, $M = O + \mathbf{r}$ un point d'une surface S, $\mathbf{n}$ un vecteur unitaire porté par la normale MN à S en M. Au point M, la transformation associe un point $M_1 = O + \mathbf{r}_1$ tel que

$$\mathbf{r} \times \mathbf{r}_1 = 0, \tag{1}$$

$$(\mathbf{r} \wedge \mathbf{r}_1)\mathbf{n} = 0, \tag{2}$$

$$r_1 = r. \tag{3}$$

Nous allons déterminer le vecteur unitaire $\mathbf{n}_1$ porté par la normale $M_1 N_1$ à la surface S_1, lieu du point M_1.

Tout d'abord, l'équation (2) donne

$$\mathbf{r}_1 = \lambda \mathbf{r} + \mu \mathbf{n};$$

posons

$$\mathbf{r} \times \mathbf{n} = r \cos V; \tag{4}$$

en vertu de (1), nous aurons

$$\lambda r + \mu \cos V = 0,$$

puis, en vertu de (3),

$$\mu^2 \sin^2 V = r^2.$$

On pourra donc écrire, par exemple,

$$\lambda = -\cot V, \qquad \mu = \frac{r}{\sin V},$$

et l'on aura

$$\mathbf{r} \cos V + \mathbf{r}_1 \sin V = r\mathbf{n}. \tag{5}$$

Multiplions ($\times$) cette équation par $\mathbf{n}$ et tenons compte de (4); il viendra

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{n} = r \sin V. \tag{4$_1$}$$

Ceci posé, l'équation (5), différentiée, devient

$$\cos V\, d\mathbf{r} + \sin V\, d\mathbf{r}_1 + (-\mathbf{r}\sin V + \mathbf{r}_1 \cos V)\, dV = r\, d\mathbf{n} + \mathbf{n}\, dr,$$

et, après multiplication intérieure par $\mathbf{n}$, on en déduit

$$\sin V \mathbf{n} \times d\mathbf{r}_1 = dr = \frac{1}{r} r_1\, dr_1 = \frac{1}{r}\mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_1,$$

c'est-à-dire

$$\left(\mathbf{n}\sin V - \frac{\mathbf{r}_1}{r}\right) \times d\mathbf{r}_1 = 0.$$

Cette équation devant être vérifiée quel que soit $d\mathbf{r}_1$, on en tire

$$\mathbf{n}_1 = \rho\left(\mathbf{n}\sin V - \frac{\mathbf{r}_1}{r}\right); \tag{6}$$

les normales MN et M_1N_1 sont donc *coplanaires;* elles sont en outre *rectangulaires*, car, d'après (6) et (4), on a

$$\mathbf{n} \times \mathbf{n}_1 = 0.$$

Enfin, en exprimant que $n_1 = 1$, on trouve

$$\rho^2 \cos^2 V = 1 ;$$

on pourra donc écrire

$$\mathbf{n}\sin V + \mathbf{n}_1 \cos V = \frac{\mathbf{r}_1}{r}. \tag{7}$$

Le caractère involutif de la transformation résulte des formules (5) et (7) qui peuvent encore s'écrire, si l'on préfère :

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 \sin V = -\mathbf{r}\cos V + r\mathbf{n}, \\ r\mathbf{n}_1 \sin V = -\mathbf{r} + r\mathbf{n}\cos V, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{r}\sin(-V) = -\mathbf{r}_1 \cos(-V) + r\mathbf{n}_1, \\ r\mathbf{n}\sin(-V) = -\mathbf{r}_1 + r\mathbf{n}_1 \cos(-V), \end{cases}$$

ainsi que des formules (1), (2), (3) et de la suivante :

$$\mathbf{r} \times \mathbf{n} = r\cos V = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{n}_1.$$

Ces mêmes formules permettent encore de démontrer aisément la permutabilité des transformations apsidale et par polaires réciproques relativement à une sphère de centre O.