NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

BERTRAND GAMBIER

Surfaces de translation applicables l'une sur l'autre

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 20 (1920), p. 321-341

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__321_0>

[O¹6k]

SURFACES DE TRANSLATION APPLICABLES L'UNE SUR L'AUTRE,

(*Suite*) ;

PAR M. BERTRAND GAMBIER,

Professeur à la Faculté des Sciences de Rennes.

Je vais maintenant donner quelques exemples de surfaces, obtenus par le procédé exposé jusqu'ici. D'après la définition des fonctions f_1, f_2, f_3 (formule 23), on a

$$(30)\qquad \begin{cases} f_1\,df_1 + f_2\,df_2 + f_3\,df_3 = 0; \\ l^2 f_1\,df_1 + m^2 f_2\,df_2 + n^2 f_3\,df_3 = 0; \end{cases}$$

d'où

$$(31)\qquad \frac{f_1\,df_1}{m^2 - n^2} = \frac{f_2\,df_2}{n^2 - l^2} = \frac{f_3\,df_3}{l^2 - m^2}.$$

Supposons donc que nous définissions la fonction α par la relation

$$(32)\qquad d\alpha = \frac{f_1\,df_1}{m^2 - n^2}\,\mathrm{P}(f_1^2),$$

où P est un polynome arbitraire d'une variable ; puisque

$$f_1^2 = \mathrm{A} f_2^2 + \mathrm{B} = \mathrm{C} f_3^2 + \mathrm{D},$$

où A, B, C, D sont des constantes, on pourra écrire la relation (32) sous la forme

$$(33)\qquad d\alpha = \frac{f_1\, df_1}{m^2 - n^2} P(f_1^2) = \frac{f_2\, df_2}{n^2 - l^2} Q(f_2^2) = \frac{f_3\, df_3}{l^2 - m^2} R(f_3^2),$$

où Q et R sont deux nouveaux polynomes faciles à calculer : dans ces conditions, la courbe C donnée par les intégrales $\int f_1\, d\alpha$, $\int f_2\, d\alpha$, $\int f_3\, d\alpha$ sera manifestement une courbe algébrique, la première intégrale est obtenue en intégrant un polynome en f_1, la seconde un polynome en f_2 et de même la troisième un polynome en f_3. En opérant de même pour les intégrales $\int \varphi_1\, d\beta$, $\int \varphi_2\, d\beta$, $\int \varphi_3\, d\beta$, j'obtiendrai une infinité de surfaces algébriques de genre égal à l'unité (¹).

Prenons par exemple $P \equiv 3$, alors Q et R sont égaux à 3 et la courbe C est le lieu du point $\frac{f_1^3(t)}{m^2 - n^2}$, $\frac{f_2^3(t)}{n^2 - l^2}$, $\frac{f_3^3(t)}{l^2 - m^2}$. Le calcul analogue fait en remplaçant f_1 par φ_1, f_2 par φ_2, f_3 par φ_3 et l, m, n par $\frac{1}{l}$, $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$ montre que l'on peut prendre comme courbe Γ le lieu du point

---

(¹) Toutes ces surfaces sont intéressantes à étudier : elles admettent des symétries évidentes. Sur la courbe C les coordonnées x, y, z sont respectivement des polynomes impairs en f_1, f_2, f_3 qu'on peut supposer privés de terme constant, commençant par un terme de degré 3. Les racines de f_1 ou f_2 ou f_3 donnent trois séries de ligne de rebroussement dont deux seulement sont réelles : on obtient de même parmi les courbes $t_1 =$ const. trois séries de ligne de rebroussement.

$\dfrac{h\varphi_1^3(t_1)}{l^2(m^2-n^2)}$, $\dfrac{h\varphi_2^3(t_1)}{m^2(n^2-l^2)}$, $\dfrac{h\varphi_3^3(t_1)}{n^2(l^2-m^2)}$, où h est une constante arbitraire.

D'autre part, comme la courbe (b) est le lieu du point lf_1, mf_2, nf_3 on peut poser

$$\varphi_1(t) = lf_1(t), \qquad \varphi_2(t) \equiv mf_2(t) \qquad \text{et} \qquad \varphi_3(t) = nf_3(t),$$

de sorte que j'écrirai définitivement pour la surface S et la surface S_1 :

$$(34) \quad \begin{cases} (m^2-n^2)x = f_1^3(t) - hl\, f_1^3(t_1), \\ (n^2-l^2)y = f_2^3(t) + hm f_2^3(t_1), \\ (l^2-m^2)z = f_3^3(t) + hn\, f_3^3(t_1); \end{cases}$$

$$(35) \quad \begin{cases} (m^2-n^2)X = l\, f_1^3(t) + h\, f_1^3(t_1), \\ (n^2-l^2)Y = m f_2^3(t) - h\, f_2^3(t_1), \\ (l^2-m^2)Z = n f_3^3(t) + h\, f_3^3(t_1); \end{cases}$$

$$(36) \quad \begin{aligned} ds^2 = {} & \left\{ d\left[\frac{3}{2}\,\frac{f_1^2(t)}{m^2-n^2}\right]\right\}^2 + h^2 \left\{ d\left[\frac{3}{2}\,\frac{f_1^2(t_1)}{m^2-n^2}\right]\right\}^2 \\ & + 2h[\, l f_1(t) f_1(t_1) \\ & \qquad + m f_2(t) f_2(t_1) - n f_3(t) f_3(t_1)] \\ & \qquad \times d\left[\frac{3}{2}\,\frac{f_1^2(t)}{m^2-n^2}\right] d\left[\frac{3}{2}\,\frac{f_1^2(t_1)}{m^2-n^2}\right]. \end{aligned}$$

On remarquera que pour $h = 1$ la surface S et la surface S_1 coïncident : on a alors une auto-application de la surface particulière ainsi obtenue : la courbe $t = t^0$, où t^0 est une constante numérique, est remplacée précisément par la courbe $t_1 = t^0$, courbe différente de forme, de sorte que l'on a une transformation bien distincte d'une superposition par égalité. Pour $h = -1$, S et S_1 sont symétriques, de sorte que S est encore auto-applicable. Si l'on suppose $h^2 \neq 1$, on a deux surfaces non superposables.

La circonstance qui vient de se présenter est générale :

je rappelle les formules

$$(37)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \int f_1(t)\,\mathfrak{F}(t)\,dt + l\int f_1(t_1)\,\mathfrak{F}_1(t_1)\,dt_1,\\ X &= l\int f_1(t)\,\mathfrak{F}(t)\,dt + \int f_1(t_1)\,\mathfrak{F}_1(t_1)\,dt_1,\\ ds^2 &= \mathfrak{F}^2(t)\,dt^2 + \mathfrak{F}_1^2(t_1)\,dt_1^2\\ &\quad + 2[l f_1(t) f_1(t_1) + m f_2(t) f_2(t_1) + n f_3(t) f_3(t_1)]\\ &\quad\times \mathfrak{F}(t)\,\mathfrak{F}_1(t_1)\,dt\,dt_1, \end{aligned}\right.$$

formules qui mettent bien en évidence que si $\mathfrak{F}_1(t) \equiv \mathfrak{F}(t)$ les deux surfaces S et S_1 coïncident, que si $\mathfrak{F}_1(t) \equiv -\mathfrak{F}(t)$ les deux surfaces S et S_1 sont symétriques, mais que de toutes façons la surface S obtenue est auto-applicable, le point ($t = t^0$, $t_1 = t_1^0$) étant dans l'auto-application échangé avec le point ($t = t_1^0$, $t_1 = t^0$), d'ailleurs le ds^2 dans l'un ou l'autre de ces deux cas est effectivement symétrique en t et t_1.

Bien que les formules (1), sous la forme (I) ou la forme (37), soient commodes dans un certain nombre de cas, elles ont l'inconvénient de contenir six quadratures. Si on laisse toute sa généralité au problème, les six quadratures peuvent disparaître complètement.

On sait en effet obtenir par des différentiations et éliminations la courbe la plus générale dont le cône directeur des tangentes est un cône donné, car si $f(x, y, z) = 0$ est l'équation de ce cône transporté de façon que le sommet soit à l'origine, l'enveloppe du plan

$$X f'_x + Y f'_y + Z f'_z + \varphi(x, y, z) = 0,$$

où φ est une fonction homogène de même degré que f'_x, est une développable dont l'arête de rebroussement donne la solution générale.

Or, ici le cône directeur (q) est du second degré :

présentée sous cette forme, la recherche de C ne fait plus intervenir que les notions de tangente ou plan osculateur, qui se conservent dans une transformation homographique quelconque. Puisque l'équation du cône (q) a été mise sous la forme

$$(38) \qquad \left(\frac{x}{\sqrt{L}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{M}}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{N}}\right)^2 = 0,$$

il suffit de remarquer que la transformation homographique

$$(39) \qquad \xi = \frac{x}{\sqrt{L}}, \qquad \eta = \frac{y}{\sqrt{M}}, \qquad \zeta = \frac{z}{\sqrt{N}}$$

transforme la courbe C en courbe minima, de façon que je n'aurai qu'à écrire que le point ξ, η, ζ a pour coordonnées les expressions classiques dans la théorie des surfaces minima, obtenues d'ailleurs précisément par la méthode indiquée ici. J'ai donc pour C :

$$(40) \qquad \left\{\begin{aligned} x &= \sqrt{L}\left[\frac{1-u^2}{2}f''(u) + uf'(u) - f(u)\right] \\ &= \frac{\sqrt{L}}{2}\int(1-u^2)f'''(u)\,du, \\ y &= i\sqrt{M}\left[\frac{1+u^2}{2}f''(u) - uf'(u) + f(u)\right] \\ &= \frac{i\sqrt{M}}{2}\int(1+u^2)f'''(u)\,du, \\ z &= \sqrt{N}\quad[uf'(u) - \quad f'(u)] \\ &= \sqrt{N}\int \quad u\ f'''(u)\,du. \end{aligned}\right.$$

La courbe Γ s'obtient en remplaçant dans (40) u par u_1, $f(u)$ par $f_1(u_1)$ et multipliant x, y, z par l, m, n respectivement. Rappelons d'ailleurs que $l = \frac{\sqrt{L+\lambda}}{\sqrt{L}}$, $m = \frac{\sqrt{M+\lambda}}{\sqrt{M}}$, $n = \frac{\sqrt{N+\lambda}}{\sqrt{N}}$.

Je pourrai donc écrire :

$$
(\mathrm{P}')\left\{
\begin{array}{l}
(\mathrm{S})\left\{
\begin{array}{l}
x = \sqrt{L}\left[\dfrac{1-u^2}{2} f''(u) + u f'(u) - f(u)\right] \\
\qquad + \sqrt{L+\lambda}\left[\dfrac{1-u_1^2}{2} f_1''(u_1) + u_1 f_1'(u_1) - f_1(u_1)\right], \\
y = \sqrt{-M}\left[\dfrac{1+u^2}{2} f''(u) - u f'(u) + f(u)\right] \\
\qquad + \sqrt{-(M+\lambda)}\left[\dfrac{1+u_1^2}{2} f_1''(u_1) - u_1 f_1'(u_1) + f_1(u_1)\right], \\
z = \sqrt{N}\left[u f''(u) - f'(u)\right] \\
\qquad + \sqrt{N+\lambda}\left[u_1 f_1''(u_1) - f_1'(u_1)\right];
\end{array}\right. \\
(\mathrm{S}_1)\left\{
\begin{array}{l}
X = \sqrt{L+\lambda}\left[\dfrac{1-u^2}{2} f''(u) + u f'(u) - f(u)\right] \\
\qquad + \sqrt{L}\left[\dfrac{1-u_1^2}{2} f_1''(u_1) + u_1 f_1'(u_1) - f_1(u_1)\right], \\
Y = \sqrt{-(M+\lambda)}\left[\dfrac{1+u^2}{2} f''(u) - u f'(u) + f(u)\right] \\
\qquad + \sqrt{-M}\left[\dfrac{1-u_1^2}{2} f_1''(u_1) - u_1 f_1'(u_1) + f_1(u_1)\right], \\
Z = \sqrt{N+\lambda}\left[u f''(u) - f'(u)\right] \\
\qquad + \sqrt{N}\left[u_1 f_1''(u_1) - f_1'(u_1)\right];
\end{array}\right. \\
ds^2 = \dfrac{(L-M)(1+u^4) + (4N-2L-2M)u^2}{4} f'''^2(u)\, du^2 \\
\qquad + \dfrac{(L-M)(1+u_1^4) + (4N-2L-2M)u_1^2}{4} f_1'''^2(u_1)\, du_1^2 \\
\qquad - \dfrac{\sqrt{L}\sqrt{L+\lambda}(1-u^2)(1-u_1^2) - \sqrt{-M}\sqrt{-(M+\lambda)}(1+u^2)(1+u_1^2) + 4\sqrt{N}\sqrt{N+\lambda}}{2} \\
\qquad \times f'''(u) f_1'''(u_1)\, du\, du_1.
\end{array}\right.
$$

Dans ces formules, L, M, N, λ sont des nombres donnés ; on a pris pour $\sqrt{L}$ une détermination arbitraire, pour $\sqrt{L+\lambda}$ une détermination arbitraire et dans toutes les formules on conserve ces déterminations ; de même pour $\sqrt{-M}$, $\sqrt{-(M+\lambda)}$, $\sqrt{N}$ et $\sqrt{N+\lambda}$.

Les précautions à prendre sont les suivantes : je ne m'occupe que du cas où S et S_1 sont réelles toutes deux. Si les réseaux C, Γ, C_1 et Γ_1 sont réels, deux des nombres L, M, N sont de même signe, l'autre de signe contraire. Supposons L et N positifs, M négatif; on sait que $L+\lambda$, $M+\lambda$, $N+\lambda$ sont de même signe que L, M, N respectivement; dans ces conditions, les formules (I′) résolvent complètement la question, on prend pour f et f_1 deux fonctions réelles des variables réelles u et u_1 respectivement. Si l'on avait obtenu L et M positifs, N négatif, il suffirait évidemment de remplacer la lettre y par la lettre z, la lettre M par la lettre N et inversement.

Si S et S_1 sont réelles mais découpées par des lignes de translation imaginaires, on prend pour u une variable complexe, pour u_1 la variable conjuguée; f et f_1 sont alors des fonctions conjuguées; nous avons vu que l'on pouvait alors supposer L, M, N imaginaires avec la même partie imaginaire, cela permet d'écrire

$$\sqrt{L} = a + \frac{ki}{a}, \qquad \sqrt{M} = b + \frac{ki}{b}, \qquad \sqrt{N} = c + \frac{ki}{c},$$
$$\sqrt{L+\lambda} = a - \frac{ki}{a}, \qquad \sqrt{M+\lambda} = b - \frac{ki}{b},$$
$$\sqrt{N+\lambda} = c - \frac{ki}{c},$$

où a, b, c, k sont quatre constantes arbitraires réelles, et alors tout est parfaitement connu.

A titre de curiosité, on remarquera que, pour $L = M = N = 1$ et $\lambda = 0$, les formules (I′) donnent précisément une surface minima.

Il est presque superflu d'ajouter que f''' et f_1''' ne doivent pas être identiquement nulles; ajouter à f ou f_1 un polynome du second degré revient à imprimer à S et S_1 une certaine translation.

Si $f_1(u) \equiv f(u)$, S et S_1 coïncident, mais S est auto-applicable par échange des courbes u et u_1. Si $f_1(u) \equiv -f(u)$, S et S_1 sont symétriques ; S est encore auto-applicable.

La nouvelle forme (I') va nous permettre d'obtenir sans effort des surfaces unicursales. Je donne quelques exemples numériques simples : il suffira par exemple de prendre

$$f(u) \equiv u^3, \qquad f_1(u_1) \equiv h u_1^3.$$

Il est très simple d'obtenir des valeurs entières pour tous les nombres $\sqrt{L}$, $\sqrt{L+\lambda}$, $\sqrt{-M}$, $\sqrt{-(M+\lambda)}$, $\sqrt{N}$, $\sqrt{N+\lambda}$. Prenons en particulier

$$L = 22^2, \qquad M = -49, \qquad N = 36, \qquad \lambda = 45,$$

d'où résulte

$$L + \lambda = 23^2, \qquad M + \lambda = -4, \qquad N + \lambda = 81.$$

J'aurai pour les surfaces S et S_1 :

$$(41) \quad \begin{cases} x = 22(3u - u^3) + 23h(3u_1 - u_1^3), \\ y = 7(3u + u^3) + 2h(3u_1 + u_1^3), \\ z = 6(3u^2) \qquad\quad + 9h(3u_1^2); \end{cases}$$

$$(42) \quad \begin{cases} X = 23(3u - u^3) + 22h(3u_1 - u_1^3), \\ Y = 2(3u + u^3) + 7h(3u_1 + u_1^3), \\ Z = 9(3u^2) \qquad\quad + 6h(3u_1^2); \end{cases}$$

$$(43) \quad \begin{aligned} ds^2 = {} & 9\,[533(1 + u^4) - 726u^2]\,du^2 \\ & + 9h^2[533(1 + u_1^4) - 726u_1^2]\,du_1^2 \\ & + 72[130(1 + u^2u_1^2) - 123(u^2 + u_1^2) + 54uu_1] \\ & \quad \times h\,du\,du_1. \end{aligned}$$

Si je prends $f(u) \equiv u^3$, $f_1(u) \equiv u^4$ avec les mêmes valeurs de L, M, N, λ, j'aurai deux surfaces S et S_1 admettant toutes deux comme ligne de rebroussement la courbe $u_1 = 0$ qui est une cubique gauche. J'écris les équations de ces nouvelles surfaces :

$$(44)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= 22(3u - u^3) + 23(6u_1^2 - 3u_1^4),\\ y &= 7(3u + u^3) + 2(6u_1^2 - 3u_1^4),\\ z &= 6(3u^2) \qquad + 9(8u_1^3);\end{aligned}\right.$$

$$(45)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= 23(3u - u^3) + 22(6u_1^2 - 3u_1^4),\\ Y &= 2(3u + u^3) + 7(6u_1^2 + 3u_1^4),\\ Z &= 9(3u^2) \qquad + 6(8u_1^3);\end{aligned}\right.$$

$$\begin{aligned}(46)\quad ds^2 = {} & 9\,[533(1+u^4) - 726u^2]\,du^2\\ & + 144u_1^2[533(1+u_1^4) - 726u_1^2]\,du_1^2\\ & + 288u_1[130(1+u^2u_1^2)\\ & \qquad - 123(u^2+u_1^2) + 54uu_1]\,du\,du_1.\end{aligned}$$

J'aurai des exemples de surfaces à réseaux de translation imaginaires en prenant par exemple

$$\sqrt{\mathrm{L}} = 4 + i,\qquad \sqrt{\mathrm{L}+\lambda} = 4 - i,\qquad \sqrt{\mathrm{M}} = 2 + 2i,$$
$$\sqrt{\mathrm{M}+\lambda} = 2 - 2i,\qquad \sqrt{\mathrm{N}} = 1 + 4i,\qquad \sqrt{\mathrm{N}+\lambda} = 1 - 4i;$$

en prenant

$$f(u) \equiv u^3 \qquad \text{et} \qquad f_1(u_1) \equiv u_1^3,$$

j'ai une surface S auto-applicable; en prenant

$$f(u) \equiv (1+i)u^3 \qquad \text{et} \qquad f_1(u_1) \equiv (1-i)u^3,$$

j'ai un couple S, S_1. J'écris d'abord pour la surface auto-applicable :

$$(47)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= (4+i)\quad (3u - u^3) + (4 - i)(3u_1 - u_1^3),\\ y &= (-2+2i)(3u + u^3) - (2+2i)(3u_1 + u_1^3),\\ z &= (1+4i)\quad 3u^2 \qquad + (1-4i)\;\; 3u_1^2;\end{aligned}\right.$$

$$\begin{aligned}(48)\quad ds^2 = {} & 135(1 + u^4 - 6u^2)\,du^2\\ & + 135(1 + u_1^4 - 6u_1^2)\,du_1^2\\ & + 18[25(1 + u^2u_1^2) - 9(u^2 + u_1^2) + 68uu_1]\,du\,du_1,\end{aligned}$$

et pour le couple :

$$(49)\quad \begin{cases} x = (3+5i)(3u-u^3)+(3-5i)(3u_1-u_1^3), \\ y = -4(3u+u^3)-4(3u_1-u_1^3), \\ z = (-3+5i)\ 3u^2 -(3+5i)\ 3u_1^2; \end{cases}$$

$$(50)\quad \begin{cases} X = (5+3i)(3u-u^3)+(5-3i)(3u_1-u_1^3), \\ Y = 4i(3u+u^3)-4i(3u_1+u_1^3), \\ Z = (5-3i)\ 3u^2 +(5+3i)\ 3u_1^2; \end{cases}$$

$$(51)\quad \begin{aligned} ds^2 = &\ 270i(1+u^4-6u^2)\,du^2 \\ &-270i(1+u_1^4-6u_1^2)\,du_1^2 \\ &+\ 36[25(1+u^2u_1^2)-9(u^2+u_1^2)+68uu_1]\,du\,du_1. \end{aligned}$$

Pour être tout à fait complet dans la discussion, il faut examiner ce qui arrive si la quadrique Q à centre unique a une disposition particulière relative à la sphère : il n'y a que deux cas à considérer : Q est de révolution, ou bien Q est bitangente à la sphère. Dans le premier cas, il suffit dans les formules de supposer $L = N$ ou $l = n$: les courbes (a) et (b) sont des cercles parallèles de la sphère; (A) coïncide avec (b) comme nous le savons, et la correspondance ponctuelle entre A et a s'obtient par les méridiens passant par l'axe commun de (a) et (A). C, C_1, Γ, Γ_1 sont des hélices quelconques tracées sur des cylindres ayant même direction de génératrices.

Si la quadrique Q est bitangente à la sphère aux extrémités de l'axe des z par exemple, la conique (a) ou (B) est un grand cercle dont le plan contient Oz et la conique (A) ou (b) est un autre cercle de même définition; A et a sont les points situés à la même cote; il résulte de là que C est une courbe plane située dans le plan de (a) et que C_1 est la position prise par C si l'on rabat le plan de (a) autour de Oz pour l'appliquer sur (A); on peut dire si l'on veut que C et C_1 sont symétriques l'une de l'autre par rapport à celui des deux bissecteurs de l'angle (A) (a) qui partage toutes les courbes Aa en leur milieu; Γ et Γ_1 admettent le même plan de symétrie, ce sont d'ailleurs des courbes planes aussi; de la sorte S et S_1 sont elles-mêmes symétriques l'une de l'autre et nous avons convenu d'écarter cette disposition de figure.

Si Q est à la fois de révolution et bitangente à la sphère aux extrémités de son axe de révolution, on n'obtient encore qu'un cas de symétrie, comme on le vérifie aisément,

6. Nous avons épuisé complètement le cas où la quadrique Q est à centre unique. Je me reporte au paragraphe 4 et je suppose $lm \neq 0$, $n = 0$, de sorte que Q est un cylindre du second degré admettant Oz pour axe : la courbe (a) est encore une conique sphérique quelconque.

Toutes les relations établies au paragraphe 4 deviennent ici :

$$(52)\quad \left\{\begin{array}{lll} A'_1 = l\,a'_1, & A'_2 = m\,a'_2, & A'_3 = 0; \\ b'_1 = l\,B'_1, & b'_2 = m\,B'_2, & b'_3 = 0; \\ l^2 a'^2_1 + m^2 a'^2_2 = 1, & & l^2 B'^2_1 + m^2 B'^2_2 = 1; \\ a'^2_1 + a'^2_2 + a'^2_3 = 1, & & B'^2_1 + B'^2_2 + B'^2_3 = 1, \end{array}\right.$$

la courbe (B) coïncide toujours avec la conique (a); les courbes (A) et (b) coïncident toutes deux avec l'un des grands cercles obtenus en coupant la sphère par les plans de symétrie de (a).

Si les nombres l et m sont réels, on voit aisément que la conique n'est réelle que si l^2 et m^2 ne sont pas tous deux inférieurs à l'unité; considérons la conique (a) comme une *ellipse* sphérique et soient alors F et F' les deux foyers associés de cette *ellipse;* si l'on a $l^2 < 1$,

$m^2 > 1$, le grand cercle (A) est celui qui réunit F et F′ et nous verrons plus bas qu'on doit pour la réalité des points qui se correspondent dans l'application réduire (A) à l'arc inférieur à une demi-circonférence qui réunit F à F′; si l'on a $l^2 > 1$, $m^2 > 1$ le grand cercle (A) est celui des trois grands cercles de symétrie qui ne rencontre pas (a); de la sorte, on doit bien considérer de toutes façons la disposition actuelle comme cas limite de celle du paragraphe précédent.

Les formules (I) s'appliquent sans aucune modification, sauf bien entendu à tenir compte de la relation numérique $n = 0$. D'ailleurs, ici nous pourrons prendre

$$a'_1 = \frac{\cos\theta}{l}, \qquad a'_2 = \frac{\sin\theta}{l}, \qquad a'_3 = \sqrt{1 - \frac{\cos^2\theta}{l^2} - \frac{\sin^2\theta}{m^2}},$$

de sorte que l'on a

$$(\mathrm{II}) \left\{ \begin{array}{l} (\mathrm{S}) \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{1}{l}\int \cos\theta\, \mathfrak{F}(\theta)\, d\theta + \int \cos\theta_1\, \mathfrak{F}_1(\theta_1)\, d\theta_1, \\ y &= \frac{1}{m}\int \sin\theta\, \mathfrak{F}(\theta)\, d\theta + \int \sin\theta_1\, \mathfrak{F}_1(\theta_1)\, d\theta_1, \\ z &= \int \sqrt{1 - \frac{\cos^2\theta}{l^2} - \frac{\sin^2\theta}{m^2}}\, \mathfrak{F}(\theta)\, d\theta; \end{aligned} \right. \\ (\mathrm{S}_1) \left\{ \begin{aligned} \mathrm{X} &= \int \cos\theta\, \mathfrak{F}(\theta)\, d\theta + \frac{1}{l}\int \cos\theta_1\, \mathfrak{F}_1(\theta_1)\, d\theta_1, \\ \mathrm{Y} &= \int \sin\theta\, \mathfrak{F}(\theta)\, d\theta + \frac{1}{m}\int \sin\theta_1\, \mathfrak{F}_1(\theta_1)\, d\theta_1, \\ \mathrm{Z} &= \int \sqrt{1 - \frac{\cos^2\theta_1}{l^2} - \frac{\sin^2\theta_1}{m^2}}\, \mathfrak{F}_1(\theta_1)\, d\theta_1; \end{aligned} \right. \\ ds^2 = \mathfrak{F}^2(\theta)\, d\theta^2 + \mathfrak{F}_1^2(\theta_1)\, d\theta_1^2 \\ \qquad + 2\left(\frac{\cos\theta\cos\theta_1}{l} + \frac{\sin\theta\sin\theta_1}{m}\right) \mathfrak{F}(\theta)\mathfrak{F}_1(\theta_1)\, d\theta\, d\theta_1. \end{array} \right.$$

On voit que les courbes C et Γ_1 sont deux quelconques des courbes qui admettent (a) pour indicatrice sphérique des courbures. Les courbes Γ et C_1 sont des courbes planes quelconques ; sur ces courbes θ ou θ_1 est l'angle de la tangente avec Ox et $\mathcal{F}(\theta)$ ou $\mathcal{F}_1(\theta_1)$ est le rayon de courbure.

Ce second type de solutions dépend de deux constantes arbitraires et de deux fonctions arbitraires d'une variable. La connaissance effective de l, m, $\mathcal{F}(\theta)$, $\mathcal{F}_1(\theta_1)$ donne un seul couple de *deux surfaces associées* S et S_1. Mais comme plus haut la donnée de la conique (a) et du grand cercle principal ne donne que l^2, m^2 et non l, m, de sorte qu'il est possible d'obtenir du même coup *quatre couples de deux surfaces associées;* mais à une surface S correspond une surface S_1 et *une seule*.

Pour avoir immédiatement un exemple simple je n'ai qu'à répéter le calcul fait au sujet du type (I), formules (30) à (35). Je me contente de faire une homothétie de façon à avoir des formules plus élégantes et de remplacer l par $\frac{1}{a}$, m par $\frac{1}{b}$. J'obtiens ainsi, c désignant une autre constante arbitraire,

$$(53)\quad \begin{cases} x = a\cos^3\theta + c\cos^3\theta_1, \\ y = b\ \sin^3\theta + c\ \sin^3\theta_1, \\ z = \dfrac{1}{b^2-a^2}(1 - a^2\cos^2\theta - b^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}; \end{cases}$$

$$(54)\quad \begin{cases} X = \cos^3\theta + ac\cos^3\theta_1, \\ Y = \sin^3\theta + bc\ \sin^3\theta_1, \\ Z = \dfrac{c}{b^2-a^2}(1 - a^2\cos^2\theta_1 - b^2\sin^2\theta_1)^{\frac{3}{2}}; \end{cases}$$

$$(55)\quad ds^2 = \frac{9}{4}\sin^2 2\theta\, d\theta^2 + \frac{9c^2}{4}\sin^2 2\theta_1\, d\theta_1^2 + \frac{9}{2}\sin 2\theta \sin 2\theta_1 (a\cos\theta\cos\theta_1 + b\sin\theta\sin\theta_1)\, c\, d\theta\, d\theta_1.$$

Le calcul revient à avoir pris

$$\mathcal{F}(\theta) = -3\cos\theta\sin\theta \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_1(\theta_1) = -3c\cos\theta_1\sin\theta_1.$$

L'intégration a été faite en supposant $b \neq a$; si $b = a$, conservant les mêmes valeurs pour $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_1$, j'aurai des surfaces unicursales :

$$(56)\quad \begin{cases} x = a\cos^3\theta + c\cos^3\theta_1, \\ y = a\sin^3\theta + c\sin^3\theta_1, \\ z = \frac{3}{2}\sqrt{1-a^2}\cos^2\theta; \end{cases}$$

$$(57)\quad \begin{cases} X = \cos^3\theta + ac\cos^3\theta_1, \\ Y = \sin^3\theta + ac\sin^3\theta_1, \\ Z = \frac{3}{2}c\sqrt{1-a^2}\cos^2\theta_1; \end{cases}$$

$$(58)\quad \begin{aligned} ds^2 = {} & 9\cos^2\theta\sin^2\theta\, d\theta^2 + 9c^2\cos^2\theta_1\sin^2\theta_1\, d\theta_1^2 \\ & + 18\cos\theta\sin\theta\cos\theta_1\sin\theta_1\cos(\theta-\theta_1)ac\, d\theta\, d\theta_1. \end{aligned}$$

Bien entendu, si $c = \pm 1$ dans l'un ou l'autre de ces deux exemples, je n'obtiens qu'une surface auto-applicable par échange des courbes θ et θ_1. Cela correspond à la propriété générale remarquée pour le type (I) et qui subsiste ici : pour le choix de $\mathcal{F}_1(\theta_1)$ égale à $\mathcal{F}(\theta_1)$ ou à $-\mathcal{F}(\theta_1)$, le ds^2 est symétrique en θ et θ_1, la surface S_1 est égale à S ou symétrique de S, et S est auto-applicable, par déformation, c'est-à-dire que deux régions homologues de S dans l'application ne sont ni égales ni symétriques. D'ailleurs cela saute aux yeux puisqu'une courbe $\theta =$ const. est plane et s'applique sur une courbe gauche.

L'exemple numérique se prête fort bien à signaler une propriété générale présentée par les surfaces du type (II) dans le cas où $l^2 < 1$ et $m^2 > 1$; je pose encore $l = \frac{1}{a}$, $m = \frac{1}{b}$; le radical

$$\sqrt{1 - a^2 \cos^2\theta - b^2 \sin^2\theta}$$

peut s'écrire

$$\sqrt{a^2 - b^2}\sqrt{\sin^2\theta - \frac{a^2-1}{a^2-b^2}},$$

on a supposé $a^2 > 1 > b^2$; soit V l'angle aigu tel que

$$\sin V = \sqrt{\frac{a^2-1}{a^2-b^2}}, \qquad \cos V = \sqrt{\frac{1-b^2}{a^2-b^2}};$$

pour que le point de la surface S soit réel, il faut que $V < \theta < \pi - V$ ou que $V < -\theta < \pi - V$: les valeurs $\theta = V$ et $\theta = -V$ donnent précisément les extrémités de l'arc FF′ auquel on doit réduire le grand cercle principal de la conique (a), de sorte que ce grand cercle doit bien être considéré comme une ellipse infiniment aplatie. Sur la surface S_1, si la fonction $\mathcal{F}(\theta)$ est définie pour des valeurs de θ sortant des intervalles fixés, il est clair qu'il y aura des portions de S_1 qui n'ont pas d'homologues sur S, en se bornant bien entendu aux points réels. Ces portions de S_1 sont limitées par les courbes $\theta = V$, ou $\theta = \pi - V$, ou $\theta = -V$, ou $\theta = V - \pi$: les courbes correspondantes sur S sont des courbes planes situées dans un plan horizontal et l'on voit immédiatement qu'un tel plan est plan de symétrie pour la surface S qui vient toucher ce plan tout le long de la courbe plane en question, qui est donc arête de rebroussement pour la surface S. De même si $\mathcal{F}_1(\theta_1)$ est définie pour des valeurs de θ_1 sortant des intervalles $(V, \pi - V)$ et $(V - \pi, -V)$, il existe des portions de S qui n'ont pas d'homologues réelles sur S_1, et S_1 présente des arêtes de rebroussement avec plan de symétrie. Les exemples (53) et (54) d'une part, (56) et (57) de l'autre sont faciles à étudier à ce point de vue. Je n'y insiste pas. Dans le cas où l^2 et m^2 sont tous deux supérieurs à l'unité, cette circonstance ne se produit pas. J'ai développé les considérations de cette espèce dans un Mémoire que je publie au *Bulletin des Sciences mathématiques*.

Pour achever il suffit d'opérer comme pour le type (I) de façon à obtenir les équations explicites de S et S_1 sans quadratures. Prenons d'abord le cas où $l^2 < 1$ et $m^2 > 1$; l'équation du cône q est évidemment

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2 x^2 + m^2 y^2,$$

de sorte que je peux prendre

$$L = \frac{1}{1 - l^2}, \qquad -M = \frac{1}{m^2 - 1}, \qquad N = 1, \qquad \lambda = -1$$

et appliquer les formules (I') qui subsistent sans modification. On a

$$L + \lambda = \frac{l^2}{1 - l^2}, \qquad -(M + \lambda) = \frac{m^2}{m^2 - 1}, \qquad N + \lambda = 0.$$

Je pourrai donc poser

$$m = \frac{1}{\sin\psi}, \qquad l = \sin\varphi,$$

où φ et ψ sont des constantes. On prendra

$$\sqrt{L} = \frac{1}{\cos\varphi}, \qquad \sqrt{L + \lambda} = \tang\varphi, \qquad \sqrt{-M} = \tang\psi,$$
$$\sqrt{-(M + \lambda)} = \frac{1}{\cos\psi}.$$

et alors j'écris

$$
(\mathrm{II}')\left\{
\begin{array}{l}
(\mathrm{S})\left\{
\begin{aligned}
x ={}& \frac{1}{\cos\varphi}\left[\frac{1-u^2}{2}f''(u)+u\,f'(u)-f(u)\right]\\
&+\operatorname{tang}\varphi\left[\frac{1-u_1^2}{2}f_1''(u_1)+u_1f_1'(u_1)-f_1(u_1)\right],\\
y ={}& \operatorname{tang}\psi\left[\frac{1+u^2}{2}f''(u)-u\,f'(u)+f(u)\right]\\
&+\frac{1}{\cos\psi}\left[\frac{1+u_1^2}{2}f_1''(u_1)-u_1f_1'(u_1)-f_1(u_1)\right],
\end{aligned}\right.\\
z = u\,f''(u)-f'(u);\\
(\mathrm{S}_1)\left\{
\begin{aligned}
\mathrm{X} ={}& \operatorname{tang}\varphi\left[\frac{1-u^2}{2}f''(u)+u\,f'(u)-f(u)\right]\\
&+\frac{1}{\cos\varphi}\left[\frac{1-u_1^2}{2}f_1''(u_1)+u_1f_1'(u_1)-f_1(u_1)\right],\\
\mathrm{Y} ={}& \frac{1}{\cos\psi}\left[\frac{1+u^2}{2}f''(u)-u\,f'(u)+f(u)\right]\\
&+\operatorname{tang}\psi\left[\frac{1+u_1^2}{2}f_1''(u_1)-u_1f_1'(u_1)+f_1(u_1)\right],
\end{aligned}\right.\\
\mathrm{Z} = u_1\,f_1''(u_1)-f_1'(u_1);\\
\begin{aligned}
ds^2 ={}& [\operatorname{tang}^2\varphi(1-u^2)^2+(1+\operatorname{tang}^2\psi)(1+u^2)^2]\,\frac{f'''^2(u_1)\,du^2}{4}\\
&+[\operatorname{tang}^2\varphi(1-u_1^2)^2+(1+\operatorname{tang}^2\psi)(1+u_1^2)^2]\,\frac{f_1'''^2(u_1)\,du_1^2}{4}\\
&+\left[\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}(1-u^2)(1-u_1^2)+\frac{\sin\psi}{\cos^2\psi}(1+u^2)(1+u_1^2)\right]\\
&\times\frac{f'''(u)\,f_1'''(u_1)\,du\,du_1}{2}.
\end{aligned}
\end{array}\right.
$$

Dans le cas où $l^2 > 1$, $m^2 > 1$, je prendrai

$$L = \frac{1}{l^2-1}, \qquad M = \frac{1}{m^2-1},$$
$$N = -1, \qquad \lambda = +1,$$
$$L+\lambda = \frac{l^2}{l^2-1}, \qquad M+\lambda = \frac{m^2}{m^2-1}, \qquad N+\lambda = 0,$$

et je poserai

$$l = \frac{1}{\sin\varphi}, \qquad m = \frac{1}{\sin\psi},$$

et profitant d'une remarque faite à propos des formules (40), j'écrirai

$$
(\mathrm{H}'')\left\{
\begin{aligned}
&(\mathrm{S})\left\{
\begin{aligned}
x &= \operatorname{tang}\varphi\left[\frac{1-u^2}{2}f''(u)+u\,f'(u)-f(u)\right]\\
&\quad+\frac{1}{\cos\varphi}\left[\frac{1-u_1^2}{2}f_1''(u_1)+u_1f_1'(u_1)-f_1(u_1)\right],\\
y &= \operatorname{tang}\psi\left[u\,f''(u)-f'(u)\right]\\
&\quad+\frac{1}{\cos\psi}\left[u_1\,f_1''(u_1)-f_1'(u_1)\right],\\
z &= \frac{1+u^2}{2}f''(u)-u\,f'(u)+f(u);
\end{aligned}\right.\\
&(\mathrm{S}_1)\left\{
\begin{aligned}
\mathrm{X} &= \frac{1}{\cos\varphi}\left[\frac{1-u^2}{2}f''(u)+u\,f'(u)-f(u)\right]\\
&\quad+\operatorname{tang}\varphi\left[\frac{1-u_1^2}{2}f_1'(u_1)+u_1f_1'(u_1)-f_1(u_1)\right],\\
\mathrm{Y} &= \frac{1}{\cos\psi}\left[u\,f'(u)-f'(u)\right]\\
&\quad-\operatorname{tang}\psi\left[u_1\,f_1(u_1)-f_1'(u_1)\right],\\
\mathrm{Z} &= \frac{1+u_1^2}{2}f_1'(u_1)-u_1f_1'(u_1)-f_1(u_1);
\end{aligned}\right.\\
&ds^2 = \left[\frac{(1-u^2)^2}{4\cos^2\varphi}+\frac{u^2}{\cos^2\psi}\right]f''^2(u)\,du^2\\
&\quad+\left[\frac{(1-u_1^2)^2}{4\cos^2\varphi}+\frac{u_1^2}{\cos^2\psi}\right]f_1''^2(u_1)\,du_1^2\\
&\quad+\left[\frac{\sin\varphi(1-u^2)(1-u_1^2)}{2\cos^2\varphi}+2\frac{\sin\psi\,u u_1}{\cos^2\psi}\right]f''(u)f_1''(u_1)\,du\,du_1.
\end{aligned}\right.
$$

Il est facile de voir pourquoi en apparence les formules (H'') cachent ce fait que certaines portions de S ou de S_1 cessent d'avoir un homologue sur l'autre surface. Il peut arriver que certaines valeurs imaginaires de u_1 ou f_1 donnent une valeur réelle aux expressions

$$\frac{1-u_1^2}{2}f_1''(u_1)+u_1f_1'(u_1)-f_1(u_1)$$

et

$$\frac{1+u_1^2}{2}f_1''(u_1)-u_1f_1'(u_1)+f_1(u_1),$$

mais rendent $u_1f_1''(u_1)-f_1'(u_1)$ imaginaire; il suffit d'appliquer cette remarque aux exemples (53), (54) ou (56), (57) pour saisir le mécanisme. Ceci tient somme toute au même fait qu'une courbe gauche dans l'espace supposée réelle peut avoir une projection sur le plan xOy composée d'une portion provenant des points réels de la courbe et une autre portion également réelle provenant de points imaginaires.

Le seul cas particulier qui puisse se présenter est le cas $l^2 = m^2$, avec $l^2 > 1$ pour la réalité ; les formules ne cessent de s'appliquer, mais (a) est un parallèle de la sphère, et (A) le grand cercle ayant même axe. Les courbes C et Γ_1 sont alors des hélices.

On aura des exemples numériques intéressants en prenant

$$f(u) = u^3, \qquad f_1(u_1) = hu_1^3$$

ou bien

$$f(u) = u^3, \qquad f_1(u\ ) = u_1^4.$$

Je retiens ce dernier dans le cas $l^2 < 1$, $m^2 > 1$: j'ecris en prenant les formules (II') :

$$(59)\quad \begin{cases} x = \dfrac{3u - u^3}{\cos\varphi} + \operatorname{tang}\varphi(6u_1^2 - 3u_1^4), \\ y = \operatorname{tang}\psi(3u + u^3) + \dfrac{6u_1^2 + 3u_1^4}{\cos\psi}, \\ z = 3u^2; \end{cases}$$

$$(60)\quad \begin{cases} X = \operatorname{tang}\varphi(3u - u^3) + \dfrac{6u_1^2 - 3u_1^4}{\cos\varphi}, \\ Y = \dfrac{3u + u^3}{\cos\psi} + \operatorname{tang}\psi(6u_1^2 + 3u_1^4), \\ Z = 8u_1^3; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (61)\quad ds^2 = {} & [(1 - u^2)^2 \operatorname{tang}^2\varphi) + (1 + \operatorname{tang}^2\psi)(1 + u^2)^2]\, 9\, du^2 \\ & + [(1 - u_1^2)^2 \operatorname{tang}^2\varphi) + (1 + \operatorname{tang}^2\psi)(1 + u_1^2)^2]\, 144\, u_1^2\, du_1^2 \\ & + 72\left[(1 - u^2)(1 - u_1^2)\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\right. \\ & \qquad \left. + \frac{(1 + u^2)(1 + u_1^2)\sin\psi}{\cos^2\psi}\right] u_1\, du\, du_1; \end{aligned}$$

et il saute clairement aux yeux que pour u_1 imaginaire pure et u réel le point de la première surface est encore réel, mais que le point correspondant de la seconde est imaginaire, et cela confirme nos prévisions. Sur la surface S le point (u, u_1) et $(u, -u_1)$, où u et u_1 sont réels tous deux, est un seul et même point qui, dans l'application de S_1 sur S, est recouvert deux fois; le point (u, iu'_1), où u et u'_1 sont réels, n'a pas d'homologue réel sur S_1. La courbe séparatrice sur S des régions effectivement recouvertes est la courbe $u_1 = 0$ qui est une cubique gauche ne présentant aucune singularité relative à S; mais sur la surface S_1 cette courbe $u_1 = 0$ est une cubique plane du plan xOy et est arête de rebroussement de S_1 : le plan xOy est d'ailleurs plan de symétrie de la surface S_1. Les formules (59) constituent évidemment une représentation paramétrique impropre de la surface S.

7. Nous avons épuisé complètement le cas où $lm \neq 0$ et $n = 0$. Je suppose maintenant $m = n = 0$ et $l \neq 0$.

Les formules (14) du paragraphe 4 deviennent

$$(62)\quad \begin{cases} A'_1 = l\,a'_1, & A'_2 = 0, & A'_3 = 0; \\ b'_1 = l\,B'_1, & b'_2 = 0, & b'_3 = 0; \end{cases}$$

il résulte manifestement de là que l'on peut prendre $A'_1 = 1$, $b' = 1$ et en remplaçant pour plus de commodité dans l'écriture l par $\frac{1}{h}$, j'ai, en recopiant les formules (I),

$$(\text{III})\begin{cases} (\text{S})\begin{cases} x = h\int \mathfrak{F}(\theta)\,d\theta + \int \mathfrak{F}_1(\theta_1)\,d\theta_1, \\ y = \sqrt{1-h^2}\int \cos\theta\,\mathfrak{F}(\theta)\,d\theta, \\ z = \sqrt{1-h^2}\int \sin\theta\,\mathfrak{F}(\theta)\,d\theta; \end{cases} \\ (\text{S}_1)\begin{cases} \text{X} = \int \mathfrak{F}(\theta)\,d\theta + h\int \mathfrak{F}_1(\theta_1)\,d\theta_1, \\ \text{Y} = \sqrt{1-h^2}\int \cos\theta_1\,\mathfrak{F}_1(\theta_1)\,d\theta_1, \\ \text{Z} = \sqrt{1-h^2}\int \sin\theta_1\,\mathfrak{F}_1(\theta_1)\,d\theta_1; \end{cases} \\ ds^2 = \mathfrak{F}^2(\theta)\,d\theta^2 + \mathfrak{F}_1^2(\theta_1)\,d\theta_1^2 + 2h\,\mathfrak{F}(\theta)\,\mathfrak{F}_1(\theta_1)\,d\theta\,d\theta_1. \end{cases}$$

L'interprétation géométrique est évidente : S et S_1 sont *deux cylindres quelconques :* déroulons-les tous deux sur un même plan de façon que dans le développement les génératrices des deux cylindres fassent entre elles un angle V tel que $\cos V = h$: nous avons ainsi défini, en faisant correspondre les points des cylindres qui recouvrent un même point du plan, une application où les génératrices de l'un correspondent à une famille d'hélices de l'autre. Sur la sphère la conique (a) ou (B) est un petit cercle, et l'autre conique (A) ou (b) est réduite à un point unique, à savoir le pôle du petit cercle.

Ici on a en réalité une *déformation continue;* mais cet exemple est somme toute presque aussi banal que l'application des deux cylindres, génératrice sur génératrice. Je n'y insiste pas davantage.

(A suivre.)