Nouvelles annales de mathématiques

Certificat de mécanique appliquée

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 20 (1920), p. 314-316

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__314_1>

CERTIFICAT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE.

Lille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Démontrer la formule d'Euler qui donne le couple moteur d'une turbine hydraulique, et* *en déduire les expressions de la puissance et du rendement de ce moteur.*

Établir ensuite la première équation de la théorie approchée des turbines, jusqu'à l'équation de régime inclusivement.

SOLUTION. — Voir les cours d'Hydraulique

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Étudier, dans le cas suivant, le problème de la poutre droite uniformément chargée, reposant librement sur trois appuis simples :*

La poutre est plane symétriquement sur les appuis extrêmes A *et* B.

Le support intermédiaire, C, *est à égale distance de* A *et de* B, *un peu en dessous de l'horizontale* AB, *à une distance* ε *égale à la moitié de la flèche que la poutre prendrait en* C *si le troisième support était supprimé.*

Si l'on désigne par $2a$ *la distance* AB, *la longueur totale* l *de la poutre est égale à* $3a$.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — Si l'on suppose supprimé l'appui intermédiaire, les réactions verticales des appuis A et B ont pour valeur commune $Y = \frac{3pa}{2}$, p étant la charge par unité de longueur. On en déduit que, en prenant pour origine le milieu de AB, la fibre moyenne déformée a pour équation différentielle

$$EIy'' = -\frac{p}{8}(4x^2 + a^2).$$

Les conditions aux limites sont $y = 0$ pour $x = a$, $y' = 0$ pour $x = 0$. On en déduit la flèche f pour $x = 0$:

$$EIf = \frac{5}{48}pa^4.$$

Avec l'appui intermédiaire, qui introduit une réaction verticale $Z = 2U$, les réactions des appuis A et B prennent la valeur $Y_1 = \frac{3pa}{2} - U$. L'équation nouvelle de la fibre déformée est

$$EIy_1'' = -\frac{p}{8}(4x^2 + a^2) + U(a - x).$$

Les conditions initiales sont : pour $x = a$, $y_1 = 0$; pour $x = 0$, $y'_1 = 0$, $y_1 = \frac{f}{2}$. On a

$$\text{EI}y_1 = -\frac{p}{8}\left(\frac{x^4}{3} + \frac{a^2x^2}{2}\right) + \frac{\text{U}(a-x)^3}{6} + \text{A}(a-x) + \text{B};$$

$$0 = -\text{EI}f + \text{B};$$

$$0 = \frac{\text{U}a^2}{2} + \text{A};$$

$$\frac{\text{EI}f}{2} = \frac{\text{U}a^3}{6} + \text{A}a + \text{B}.$$

On en déduit

$$\text{U} = \frac{5}{16}pa, \qquad \text{Y}_1 = \frac{19}{16}pa, \qquad \text{Z} = \frac{5}{8}pa.$$

Dès lors, la distribution des moments fléchissants est connue, ainsi que la forme de la fibre moyenne.

(Juin 1919.)