NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ÉT. DELASSUS

# Concours spécial d'agrégation de 1919. Solution du problème de mécanique

*Nouvelles annales de mathématiques 4e série*, tome 20 (1920), p. 297-307

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__297_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1920, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques*

http://www.numdam.org/

# CONCOURS SPÉCIAL D'AGREGATION DE 1919. SOLUTION DU PROBLÈME DE MÉCANIQUE;

PAR M. ET. DELASSUS.

I. *Deux points matériels pesants* M, M′, *de même masse* $m$, *sont reliés par un fil flexible de masse négligeable. Ils sont placés sur un plan incliné fixe, faisant un angle* $\alpha$ *avec le plan horizontal.*

*Étudier le mouvement du système et spécialement le mouvement du point* M *par rapport à des axes de directions fixes issus du milieu* G *du fil :*

1° *En supposant le fil inextensible ;*

2° *En supposant le fil élastique ; on admettra dans ce cas que la tension du fil est* $mk^2\frac{r-\rho}{\rho}$, *où* $m$ *désigne la masse donnée de* M, $k^2$ *un coefficient constant,* $2\rho$ *la longueur naturelle du fil,* $2r$ *sa longueur actuelle. Comment, dans cette hypothèse, doit-on choisir les conditions initiales pour que le fil reste tendu pendant toute la durée du mouvement ? Peut-on choisir ces conditions initiales de manière que le fil conserve une longueur constante* $2r \geqq 2\rho$ ?

II. *Un tube circulaire matériel de rayon* R *est fixé à plat, sur le plan incliné. Le fil, supposé inextensible, est placé à l'intérieur de ce tube, avec les deux points pesants attachés aux deux extrémités; il affecte donc, une fois tendu, la forme d'un arc de cercle dont on appellera* $2\varphi \leq 2\pi$ *l'angle au centre correspondant.*

*On imprime au plan incliné un mouvement de rotation uniforme de vitesse angulaire donnée* $\omega$, *autour d'un axe vertical fixe* $\Delta$. *On suppose que le point où l'axe* $\Delta$ *perce le plan incliné est sur la même ligne de plus grande pente que le centre du tube circulaire, plus bas que lui, la distance qui les sépare étant* $\dfrac{g \sin\alpha}{\omega^2 \cos^2\alpha}$.

*Trouver et discuter les positions d'équilibre relatif du fil supposé tendu. La longueur* $2\rho$ *du fil étant donnée, à quelles conditions doit satisfaire* R *pour qu'il y ait au moins une position d'équilibre stable?*

III. *On enlève le tube circulaire; les deux points pesants* M *et* M', *reliés par le fil, supposé inextensible, sont de nouveau placés sur le plan incliné auquel on continue à imprimer un mouvement de rotation uniforme autour de* $\Delta$.

1° *Déterminer le mouvement du milieu* G *du fil par rapport au plan incliné. Existe-t-il pour ce point des positions d'équilibre? Étudier leur stabilité. Étudier les mouvements de* G *dans lesquels le point ne s'éloigne pas à l'infini; montrer qu'il tend alors, quand t augmente indéfiniment, vers une position limite, et reconnaître dans quels cas la trajectoire du point* G *admet ce point limite comme point asymptote.*

*Le point G étant placé initialement sur celle des lignes de plus grande pente du plan incliné qui rencontre l'axe* Δ, *à quelle condition doit satisfaire la direction de sa vitesse initiale pour que, dans son mouvement ultérieur, il ne s'éloigne pas à l'infini?*

2° *Déterminer et discuter le mouvement du point* M *par rapport à des axes issus de* G *et de directions invariablement liées au plan incliné. Le point* M *admet-il par rapport à ces axes des positions d'équilibre? Étudier leur stabilité. Calculer la tension du fil et chercher si, le fil étant tendu au début du mouvement, il peut cesser d'être tendu dans le cours du mouvement.*

*N. B. — On négligera les frottements et l'on admettra, dans la partie* III, *que les points* M *et* M′ *ne peuvent pas se détacher du plan incliné.*

SOLUTION.

Pour éviter les répétitions, commençons par établir certaines formules et rappeler quelques résultats.

Prenons comme axes attachés au plan incliné tournant : $Oz$ normale ascendante, $Ox$ ligne de plus grande pente ascendante et $Oy$ horizontale, le point O étant le pied de l'axe vertical Δ. Tout point X, Y, O du plan aura une vitesse résultante de sa vitesse relative et de la vitesse d'entraînement due à la rotation $\omega$ ; ses composantes seront

$$u = X' - \omega Y \cos\alpha, \qquad v = Y' + \omega X \cos\alpha, \qquad w = \omega Y \sin\alpha,$$

et celles de son accélération

$$\begin{aligned} u' - \omega v \cos\alpha &= X'' - 2\omega \cos\alpha\, Y' - \omega^2 \cos^2\alpha\, X', \\ v' + \omega u \cos\alpha - \omega w \sin\alpha &= Y'' + 2\omega \cos\alpha\, X' - \omega^2 Y, \\ w' + \omega v \sin\alpha &= 2\omega \sin\alpha\, Y' + \omega^2 \sin\alpha \cos\alpha\, X. \end{aligned}$$

Si, considérant deux points M, M′, de même masse, nous introduisons leur centre de gravité $\xi$, $\eta$ et désignons par $\xi \pm x$, $\eta \pm y$ les coordonnées de ces deux points, on aura les vitesses

$$\begin{gathered}\xi' - \omega\eta \cos\alpha \pm (x' - \omega y \cos\alpha),\\ \eta' + \omega\xi \cos\alpha \pm (y' + \omega x \cos\alpha),\\ \omega\eta \sin\alpha \pm \omega y \sin\alpha;\end{gathered}$$

d'où pour la force vive

$$\begin{aligned}2\mathrm{T} = \; & 2m[(\xi' - \omega\eta\cos\alpha)^2 + (\eta' + \omega\xi\cos\alpha)^2 + \omega^2\eta^2\sin^2\alpha]\\ & + 2m[(x' - \omega y\cos\alpha)^2 + (y' + \omega x\cos\alpha)^2 + \omega^2 y^2 \sin^2\alpha].\end{aligned}$$

Nous désignerons par $\theta + \frac{\pi}{2}$ et $\theta - \frac{\pi}{2}$ les inclinaisons de GM et GM′ sur $Ox$, de sorte que nous aurons à faire, dans cette formule,

$$x = -r\sin\theta, \qquad y = r\cos\theta.$$

Rappelons enfin que tout système de Lagrange à fonction génératrice $2\mathrm{G}$ indépendante du temps, c'est-à-dire à intégrale des forces vives, donne, pour les paramètres, les équilibres

$$\frac{\partial \mathrm{G}_0}{\partial q_1} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial \mathrm{G}_0}{\partial q_u} = 0$$

et que, dans le cas d'un seul paramètre, le théorème de Lagrange sur la stabilité s'applique ainsi que sa réciproque ([1]). Les équilibres donnant maximum de $\mathrm{G}_0$ sont stables et tous les autres sont instables.

I. 1° On a $\omega = 0$, $r = \text{const.}$; donc

$$2\mathrm{G} = 2m[\xi'^2 + \eta'^2 + r^2\theta'^2] - 4mg\xi\sin\alpha$$

([1]) DELASSUS. *Leçons sur la dynamique des systèmes matériels* (Chap. III, § 102, p. 114, et Chap. VI, § 154, p. 213).

se décomposant en

$$2G_{\xi,\eta} = \xi'^2 + \eta'^2 - 2g\xi \sin\alpha$$

qui indique le mouvement parabolique de G, et en

$$2G_\theta = \theta'^2$$

qui indique la rotation uniforme autour de G.

Quant à la tension, on l'obtient en écrivant l'équation, suivant $Oy$, du mouvement de M et l'on trouve la valeur constante et positive $\frac{mr\theta'^2}{2}$.

2° On a $\omega = 0$ ; $r$ est variable et l'on a la fonction de force supplémentaire

$$-mk^2\frac{r^2 - 2\rho r}{2};$$

donc

$$\begin{aligned}2G &= 2m[\xi'^2 + \eta'^2 - 2g\xi\sin\alpha] \\ &\quad + 2m\left[r'^2 + r^2\theta'^2 - k^2\frac{r^2 - 2\rho r}{2}\right].\end{aligned}$$

Il y a encore décomposition. Le premier morceau donne le mouvement parabolique de G et le second le mouvement autour de G. Ce second morceau est dans le cas régulier d'intégration et donne

$$r^2\theta' = C, \qquad r^2 r'^2 = \left[h - k^2\frac{r^2 - 2\rho r}{2}\right]r^2 - C^2 = F(r).$$

$F(r)$ développée n'a que deux variations et les substitutions $0$, $r_0$, $+\infty$ donnent $-$, $+$, $-$ donc oscillation périodique de $r$ entre deux valeurs d'arrêt $r_1$, $r_2$.

Pour que le fil reste tendu, il faut $r_1 > \rho$ ; donc

$$F(\rho) < 0,$$

inégalité qui, traduite en $r'_0$ et $\theta'_0$ est quadratique de la forme hyperbolique, donc peut toujours être vérifiée en quantités réelles.

Pour que $r$ reste constant il faut $r'_0 = 0$ et

$$F'(r_0) = 0,$$

égalité qui détermine $\theta_0'^2$ et la valeur trouvée est positive par suite de l'hypothèse $r_0 > \rho$.

III. Nous traiterons cette partie avant la seconde, car elle est la généralisation naturelle de la première.

On a $\omega \neq 0$ et $r$ constant; donc fonction $2G$ se décomposant en deux morceaux qui, après suppression de facteurs constants et positifs et de termes équivalents à zéro comme constantes ou dérivées exactes, se réduisent à

$$\begin{aligned} 2G_{\xi,\eta} &= (\xi' - \omega\eta\cos\alpha)^2 \\ &\quad + (\eta' + \omega\xi\cos\alpha)^2 + \omega^2\eta^2\sin^2\alpha - 2g\xi\sin\alpha, \\ 2G_\theta &= \theta'^2 + \omega^2\sin^2\alpha\cos^2\theta \end{aligned}$$

et donnent séparément le mouvement de G et le mouvement autour de G.

1° *Étude du mouvement de* G. — La fonction $2G_{\xi,\eta}$ est une forme quadratique à coefficients constants de $\xi$, $\eta$, $\xi'$, $\eta'$. Donc les équations de Lagrange sont linéaires et à coefficients constants :

$$\begin{gathered} \xi'' - 2\omega\cos\alpha\eta' - \omega^2\cos^2\alpha\xi + g\sin\alpha = 0, \\ \eta'' + 2\omega\cos\alpha\xi' - \omega^2\eta = 0. \end{gathered}$$

On a la solution particulière évidente

$$\xi = \frac{g\sin\alpha}{\omega^2\cos^2\alpha} = a, \qquad \eta = 0,$$

donnant une trajectoire réduite à un point $\Omega$ de l'axe $Ox$ et les équations sans seconds membres donnent l'équation caractéristique bicarrée

$$(s^2 - \omega^2\cos^2\alpha)(s^2 - \omega^2) + 4\omega^2 s^2\cos^2\alpha = 0,$$

dont les quatre racines $\pm s_1$, $\pm s_2$ ne présentent que les deux cas suivants :

$$\cos\alpha < \frac{1}{3} : s_1 \text{ et } s_2 \text{ réelles et positives};$$

$$\cos\alpha > \frac{1}{3} : s_1 = a - bi, \qquad s_2 = a + bi, \qquad a > 0.$$

Sans nous préocuper de mettre la solution générale sous forme réelle, nous aurons

$$\begin{aligned}
\xi &= a + \mathrm{A}\lambda_1 e^{s_1 t} + \mathrm{B}\lambda_2 e^{s_2 t} + \mathrm{C}\lambda_1 e^{-s_1 t} + \mathrm{D}\lambda_2 e^{-s_2 t},\\
\eta &= \qquad \mathrm{A}\mu_1 e^{s_1 t} + \mathrm{B}\mu_2 e^{s_2 t} - \mathrm{C}\mu_1 e^{-s_1 t} - \mathrm{D}\mu_2 e^{-s_2 t},
\end{aligned}$$

les $\lambda$ et les $\mu$ étant des constantes définies par

$$\lambda = \omega^2 - s^2, \qquad \mu = 2\omega s \cos\alpha$$

et A, B, C, D des constantes arbitraires déterminées par les conditions initiales.

Quand $t$ croît indéfiniment, les exponentielles $e^{s_1 t}$, $e^{s_2 t}$ croissent indéfiniment, tandis que les exponentielles $e^{-s_1 t}$, $e^{-s_2 t}$ tendent vers zéro, de sorte que les mouvements dans lesquels G ne s'éloigne pas à l'infini sont ceux dont les conditions initiales donnent

$$\mathrm{A} = \mathrm{B} = 0,$$

et alors, quand $t$ croît indéfiniment, $\xi$ et $\eta$ tendent vers $a$ et 0 ; donc G tend asymptotiquement vers $\Omega$. Considérons alors le coefficient angulaire de $\Omega$G :

$$\frac{\eta}{\xi - a} = -\frac{\mathrm{C}\lambda_1 + \mathrm{D}\lambda_2 e^{-(s_2 - s_1)t}}{\mathrm{C}\mu_1 + \mathrm{D}\mu_2 e^{-(s_2 - s_1)t}};$$

si $s_1$ et $s_2$ sont réelles, l'exponentielle tend vers zéro de sorte que $\Omega$G tend vers une position limite de coefficient angulaire $-\frac{\lambda_1}{\mu_1}$ indépendante des conditions initiales; toutes les trajectoires considérées viennent passer en $\Omega$ avec une même tangente bien déterminée, elles ne sont pas asymptotes à ce point.

Si, au contraire, on est dans le cas $\cos\alpha > \frac{1}{3}$, on a $s_2 - s_1 = 2bi$ et l'exponentielle qui peut s'écrire

$$\cos 2bt + i \sin 2bt$$

ne tend plus vers zéro; elle admet la période $\frac{\pi}{b}$, de sorte que $\Omega G$ tourne indéfiniment autour de $\Omega$ et que la trajectoire est asymptote à ce point.

Partant d'une position initiale $\xi_0$, $\eta_0$ et s'imposant la condition $A = B = 0$, la vitesse initiale $\xi'_0$, $\eta'_0$, se trouve complètement déterminée. Si l'on considère les coefficients angulaires $m$ et $m'$ de $\Omega G$ et de la vitesse à l'instant initial, on aura

$$m = -\frac{C\mu_1 + D\mu_2}{C\lambda_1 + D\lambda_2}, \qquad m' = -\frac{C\mu_1 s_1 + D\mu_2 s_2}{C\lambda_1 s_1 + D\lambda_2 s_2};$$

d'où, par élimination de $\frac{C}{D}$, une relation homographique entre $m$ et $m'$, de sorte que si la position initiale de G se déplace sur une droite D issue de $\Omega$, la vitesse initiale doit avoir une direction constante bien déterminée D'. Pour le cas indiqué dans l'énoncé, on avait $m = 0$, et il en résultait

$$m' = -\frac{\mu_1\mu_2(s_1 - s_2)}{\mu_2\lambda_1 s_1 - \mu_1\lambda_2 s_2} = \frac{2\omega\cos\alpha}{s_1 + s_2} = \frac{2\cos\alpha}{\sqrt{1 + 2\cos\alpha - 3\cos^2\alpha}}.$$

Les positions d'équilibre sont données par

$$\frac{\partial}{\partial\xi}(G_{\xi,\eta})_0 = \omega^2\xi\cos^2\alpha - g\sin\alpha = 0, \quad \frac{\partial}{\partial\eta}(G_{\xi,\eta})_0 = \omega^2\eta = 0.$$

On trouve ainsi un point unique qui est le point $\Omega$ déjà rencontré. Partons d'une position $\xi_0$, $\eta_0$, choisie arbitrairement aussi voisine que nous voudrons de $\Omega$, avec une vitesse nulle, il n'en résultera pas $A = B = 0$, donc on aura un mouvement dans lequel G s'éloignera indéfiniment, ce qui indique que $\Omega$ est une position d'équilibre instable.

2° *Étude du mouvement autour de* G. Il est donné par la fonction $2G_\theta$, donc par l'intégrale des forces vives

$$\theta'^2 = h + \omega^2 \sin^2\alpha \cos^2\theta.$$

Inutile de faire ici la discussion qui ne présente aucune difficulté. Pour obtenir la tension du fil, nous écrirons, en projection sur M′ M, que la force d'inertie, la pesanteur, la réaction normale du plan et la tension du fil, appliquées en M se font équilibre. Utilisant les composantes déjà données de l'accélération, nous obtiendrons pour T une expression dans laquelle $\xi$, $\eta$, $\xi'$, $\eta'$, $\xi''$, $\eta''$ disparaîtront en vertu de deux équations du mouvement de G et il restera finalement

$$T = mr[(\theta' + \omega\cos\alpha)^2 + \omega^2\sin^2\alpha\cos^2\theta].$$

La tension, dans tous les mouvements, reste donc indéfiniment positive et il n'y a pas à s'en occuper.

Les équilibres de $\theta$ sont fournis par

$$\frac{d\cos^2\theta}{d\theta} = -2\sin\theta\cos\theta = 0,$$

et leur stabilité, d'après le théorème de Lagrange et sa réciproque, par le signe de

$$\frac{d^2\cos^2\theta}{d\theta^2} = -4\cos 2\theta.$$

On trouve ainsi la position MM′ parallèle à $Ox$ $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$ équilibre instable et la position MM′ perpendiculaire à $Ox\,(\theta = 0)$ équilibre stable.

II. On a ici

$$\omega \neq 0, \quad r = \text{const.} = R \sin\varphi$$

et, de plus,

$$\zeta = a + R\cos\varphi\cos\theta, \qquad \eta = R\cos\varphi\sin\theta,$$

$a$ étant l'abscisse du point $\Omega$ déjà rencontré et qui est le centre du cercle considéré.

Après réductions on aura

$$2G = \theta'^2 + \omega^2 \sin^2\alpha\,(\cos^2\varphi\sin^2\theta + \sin^2\varphi\cos^2\theta)$$

donnant un mouvement dont l'étude (d'ailleurs non demandée) ne présente aucune difficulté. Sa tension se calculerait comme dans la troisième partie, mais en projetant cette fois sur la tangente au cercle dans le sens MM′ du fil. L'expression obtenue est très compliquée.

Étudions l'équilibre. En posant

$$F(\theta) = \cos^2\varphi\sin^2\theta + \sin^2\varphi\cos^2\theta,$$

l'équation d'équilibre est

$$F'(\theta) = \cos 2\varphi \sin 2\theta$$

avec la condition supplémentaire que la tension du fil soit positive et la stabilité sera fournie par le théorème de Lagrange et sa réciproque, c'est-à-dire par le signe de $F''(\theta)$.

Le calcul de la tension est ici simple, car dans le calcul de l'accélération on peut faire d'avance $\xi'$, $\eta'$, $\xi''$, $\eta''$, $\theta'$ et $\theta''$ égaux à zéro. On trouve ainsi que la tension est du signe de

$$\sin(2\varphi + 2\theta).$$

L'équation d'équilibre fournit deux positions $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ pour lesquelles MM′ est perpendiculaire à $Ox$ et une position $\theta = \frac{\pi}{2}$ pour laquelle MM′ est dirigé suivant $Ox$.

Si $2\varphi < \pi$, la position $\frac{\pi}{2}$ est à rejeter et les deux positions o, $\pi$ sont simultanément instables ou stables suivant que $2\varphi$ est inférieur ou supérieur à $\frac{\pi}{2}$.

Si $2\varphi > \pi$, ce sont les deux positions o et $\pi$ qui sont à rejeter et la position $\frac{\pi}{2}$ est instable ou stable suivant que $2\varphi$ est inférieur ou supérieur à $\frac{3\pi}{2}$.

Pour qu'il y ait des équilibres stables, il faut donc que l'on ait

$$\frac{\pi R}{2} < 2\rho < \pi R \qquad \text{ou} \qquad \frac{3\pi R}{2} < 2\rho < 2\pi R,$$

c'est-à-dire

$$\frac{2\rho}{\pi} < R < \frac{4\rho}{\pi} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\rho}{\pi} < R < \frac{4\rho}{3\pi}.$$