Nouvelles annales de mathématiques

Bayard

Note sur les congruences de normales

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 20 (1920), p. 295-297

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__295_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1920, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

[$O^1 5c$]

NOTE SUR LES CONGRUENCES DE NORMALES;

PAR M. BAYARD,
Élève à l'École Polytechnique.

Cette Note a pour but de démontrer géométriquement la réciproque du théorème suivant : *Les plans tangents à la surface focale d'une congruence de normales, aux points de contact d'une droite de la congruence, sont orthogonaux*, c'est-à-dire la proposition : *Si les plans tangents à la surface focale d'une congruence de droites, aux points de contact d'une quelconque de ces droites, sont orthogonaux, la congruence proposée est une congruence de normales.*

Considérons sur l'une des nappes Σ de la surface focale les courbes (γ) telles que leurs tangentes soient des droites de la congruence. Ces courbes (γ) forment un système simplement infini sur Σ (car elles dépendent évidemment d'une équation différentielle du premier ordre). L'ensemble des tangentes à une courbe (γ) quelconque forme une développable Δ circonscrite à Σ', l'autre nappe de la focale. Le plan tangent à Δ le long d'une génératrice D est tangent à Σ', donc normal à Σ au point de contact de D et Σ. Le plan osculateur de (γ) étant en chaque point normal à Σ, (γ) est une géodésique de Σ.

Le système simplement infini de courbes (γ) admet un système de trajectoires orthogonales (φ). Soit Φ une courbe (φ) arbitraire. D'après une propriété connue des géodésiques, la longueur de courbe γ comprise entre Φ et une autre courbe (φ) quelconque est la même pour toutes les courbes (γ).

Considérons pour chaque courbe (γ) sa développante G dont le point de rebroussement est en P sur la courbe Φ. L'ensemble simplement infini de ces courbes G engendre une surface S. Soit D une tangente quelconque de γ. Le segment MN compris entre le point de contact et la développante G est évidemment égal à l'arc MP mesuré sur la courbe γ.

Cela posé, nous disons qu'une droite quelconque D_l de la congruence est normale à la surface S au point N_l. En effet, soient γ_l et φ_l les courbes γ et φ passant par M_l point où D_l touche la nappe Σ. La développante Δ_l, d'arête de rebroussement γ_l, coupe S suivant une courbe G_l qui passe par N_l. La droite D_l est évidemment orthogonale à G_l, développante de γ_l. En outre, l'ensemble des droites D, qui touchent Σ en un point de la courbe φ_l, forme une surface réglée qui coupe S suivant une certaine courbe F_l passant par N_l. La longueur $M'N'$ de génératrice comprise entre φ_l et F_l est constante puisque égale à l'arc $M'P'$ de géodésique.

Or ce segment constant $M'N'$ est normal en tout point M' au lieu de M' qui est φ_i; donc il est aussi normal en tout point N' au lieu de N' qui est F_i (d'après un théorème connu de Géométrie infinitésimale).

La droite D_i étant normale à deux courbes G_i et F_i tracées sur S est donc normale à S. La congruence considérée est donc une congruence de normales.