NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

BERTRAND GAMBIER

Surfaces de translation applicables l’une sur l’autre

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 20 (1920), p. 281-295

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__281_0>

[O¹6k]

SURFACES DE TRANSLATION APPLICABLES L'UNE SUR L'AUTRE ;

PAR M. BERTRAND GAMBIER,
Professeur à la Faculté des Sciences de Rennes.

1. Une famille de surfaces minima associées offre un bel exemple de surfaces applicables les unes sur les autres. Dans une telle famille, soit une surface S : elle est engendrée par la translation de l'une ou l'autre de deux courbes minima C ou Γ ; soient S_1 une autre surface de cette famille, C_1 et Γ_1 les courbes de même définition sur S_1. Dans l'application de S sur S_1, le réseau des diverses positions de C recouvre le réseau des diverses positions de C_1 : il en est de même pour les réseaux Γ et Γ_1.

Je généraliserai cet exemple : *je vais chercher s'il existe un couple de deux surfaces de translation* S *et* S_1, *applicables l'une sur l'autre, telles que les deux réseaux de translation tracés sur* S *correspondent, courbe par courbe, respectivement aux deux réseaux de translation tracés sur* S_1.

Une surface minima quelconque donne une solution avec non seulement un couple, mais toute une famille de surfaces à déformation continue. Nous ne nous occuperons plus de ce cas.

Une solution banale est constituée par une surface de translation quelconque S et une surface S_1 égale à S ou bien égale à une symétrique de S.

Une autre solution banale est offerte par deux cylindres quelconques : Soit S le premier, je prends une génératrice *déterminée* comme courbe C et une courbe quelconque tracée sur S comme courbe Γ; je choisis sur le second cylindre S_1 une génératrice *quelconque,* ce sera la courbe C_1. J'enroule S sur S_1 de façon que C recouvre C_1 ; la courbe Γ recouvre alors sur S_1 une certaine courbe qui sera la courbe Γ_1.

En écartant de telles solutions, je trouverai *quatre groupes distincts de solutions.* Le premier ou second groupe donne un *couple unique* de deux surfaces simultanées S et S_1 ; chacun de ces couples dépend de trois ou deux constantes arbitraires et de deux fonctions d'une variable. Les troisième et quatrième groupes donnent au contraire une *déformation continue.*

L'énoncé géométrique est remarquable de simplicité : *Les courbes simultanées* C *et* Γ *admettent pour indicatrice sphérique des courbures deux coniques sphériques homofocales quelconques* (*ou dégénérescences de telles coniques*). *Un tel couple de courbes* C *et* Γ *determine* S *et alors la surface* S_1 *peut être orientée, de sorte que* C_1 *ait même indicatrice des courbures que* Γ, *et que* Γ_1 *ait même indicatrice que* C.

Je montrerai même que l'on peut écrire explicitement les équations de S et S_1 dégagées de tout signe d'intégration. On peut en particulier obtenir une infinité de surfaces algébriques ou même unicursales.

2. Les courbes C, Γ, C_1 et Γ_1 n'étant pas minima, prenons pour paramètres indépendants les arcs α de C ou C_1 et β de Γ ou Γ_1. J'écris :

$$(S)\quad x = a_1 + b_1,\qquad y = a_2 + b_2,\qquad z = a_3 + b_3,$$
$$(S_1)\quad X = A_1 + B_1,\qquad Y = A_2 + B_2,\qquad Z = A_3 + B_3.$$

En appelant a'_1, b'_1, ... les quantités $\frac{da_1}{d\alpha}$, $\frac{db_1}{d\beta}$, ..., les conditions nécessaires et suffisantes sont évidemment :

$$(1) \quad \begin{cases} a_1'^2 + a_2'^2 + a_3'^2 = 1, & A_1'^2 + A_2'^2 + A_3'^2 = 1, \\ b_1'^2 + b_2'^2 + b_3'^2 = 1, & B_1'^2 + B_2'^2 + B_3'^2 = 1; \end{cases}$$

$$(2) \quad a'_1 b'_1 + a'_2 b'_2 + a'_3 b'_3 = A'_1 B'_1 + A'_2 B'_2 + A'_3 B'_3.$$

Les points $A(A'_1, A'_2, A'_3)$ et $a(a'_1, a'_2, a'_3)$ décrivent deux courbes sphériques simultanées (A) et (a) sur lesquelles on a établi une certaine correspondance ponctuelle. Je considère de même la correspondance ponctuelle existant entre les courbes de même définition (B) et (b). Il est nécessaire et suffisant que l'arc de grand cercle réunissant un point quelconque a de (a) à un point quelconque b de (b) soit toujours égal à l'arc de grand cercle réunissant les points homologues A et B.

Il est bien clair qu'étant donnée une solution de ce problème de géométrie sphérique on pourra déplacer d'un bloc sur la sphère le système (a), (b) d'une part ou le système (A), (B) de l'autre. Je pourrai aussi remplacer le système (a), (b) par l'ensemble des deux courbes symétriques par rapport au centre de la sphère. Cela revient à un déplacement de S ou S_1 ou à une transformation de S par symétrie, ce qui ne change pas la solution, mais permet de trouver les positions canoniques relatives de S et S_1.

Le résultat s'obtient aisément par une méthode classique appliquée à l'équation (2) prise d'abord toute seule. Dans cette équation je donne à β des valeurs *numériques;* j'obtiens autant de relations linéaires et homogènes à coefficients numériques entre a'_1, a'_2, a'_3, A'_1, A'_2, A'_3 ; l'ensemble de toutes ces relations se réduit nécessairement, si le problème est possible, à moins de six distinctes : soit h le nombre de celles qui sont linéairement indépendantes, elles permettent d'exprimer a'_1, a'_2, a'_3, A'_1, A'_2, A'_3 en fonctions linéaires et homogènes à coefficients numériques de $6-h$ quantités u_1, u_2, ... fonctions de α. Et alors si dans (2) on remplace a'_1, a'_2, ..., A'_3 par ces expressions, on obtient une relation qui doit être vérifiée pour *tous* les systèmes de valeurs attribuées à u_1, u_2, ... En égalant aux deux membres les coefficients de u_1, u_2, ..., on obtient $6-h$ relations linéaires et homogènes à coefficients numériques entre b'_1, b'_2, b'_3, B'_1, B'_2, B'_3; l'ensemble des h relations entre les a' et A' d'une part, et des $6-h$ relations entre les b' et B' de l'autre est nécessaire et suffisant pour que (2) soit vérifiée; c'est à partir de ce moment seulement que l'on tiendra compte des équations (1). On a

$$h \leqq 5 \quad \text{et} \quad 6 - h \leqq 5;$$

donc il reste $1 \leqq h \leqq 5$; et comme les paramètres α et β jouent le même rôle, puisque changer h en $6-h$ revient à échanger α et β, je n'aurai qu'à étudier $h=5$, $h=4$, $h=3$.

3. Si $h=5$, les rapports mutuels des a' et A' sont constants; en vertu de (1) ces six quantités sont constantes. La courbe (a) ainsi que la courbe (A) se réduit à un point: les courbes (b) et (B) sont arbitraires, la correspondance ponctuelle entre (b) et (B) s'obtient en coupant ces deux courbes respectivement par des circonférences tracées de a et A avec le même rayon sphérique. S et S_1 sont deux cylindres se correspondant génératrice par génératrice comme il a été déjà expliqué.

Si $h=4$, on peut écrire au moyen de douze nombres $l_1, l_2, \ldots, M_3$ et de deux fonctions U et V de α :

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} a'_1 &= l_1 U + m_1 V, & A'_1 &= L_1 U + M_1 V,\\ a'_2 &= l_2 U + m_2 V, & A'_2 &= L_2 U + M_2 V,\\ a'_3 &= l_3 U + m_3 V, & A'_3 &= L_3 U + M_3 V;\end{aligned}\right.$$

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2) U^2 + 2(l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3) UV\\ &\qquad\qquad + (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) V^2 = 1,\\ &(L_1^2 + L_2^2 + L_3^2) U^2 + 2(L_1 M_1 + L_2 M_2 + L_3 M_3) UV\\ &\qquad\qquad + (M_1^2 + M_2^2 + M_3^2) V^2 = 1.\end{aligned}\right.$$

Si ces deux relations (4) ne se réduisent pas à une seule, U et V seront eux-mêmes numériques, et alors nous retombons sur le cas des deux cylindres. Essayons donc de réduire ces deux relations a une seule, d'où

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 &= L_1^2 + L_2^2 + L_3^2,\\ m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 &= M_1^2 + M_2^2 + M_3^2,\\ l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3 &= L_1 M_1 + L_2 M_2 + L_3 M_3,\end{aligned}\right.$$

en remplaçant U par $\lambda u + \mu v$, V par $\lambda' u + \mu' v$, on peut toujours supposer $\Sigma l_1^2 \neq 0$ et $\Sigma m_1^2 \neq 0$; en remplaçant U par $U\sqrt{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2}$ et V par $V\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}$, on peut supposer $\Sigma l_1^2 = 1$, $\Sigma m_1^2 = 1$; donc les deux points $l(l_1, l_2, l_3)$ et $m(m_1, m_2, m_3)$ d'une part, les deux points $L(L_1, L_2, L_3)$ et $M(M_1, M_2, M_3)$ de l'autre sont sur la sphère décrite de O pour centre avec l'unité pour rayon ; la distance sphérique lm est égale à la distance sphérique LM ; faisons un déplacement d'ensemble des courbes (a), (b) d'une part, (A), (B) de l'autre, de façon à appliquer l sur L, m sur M, et ensuite à faire venir L et M dans le plan xOy : le point a et le point A sont toujours en coïncidence et décrivent le grand cercle de la sphère dans le plan xOy ; autrement dit, les quatre relations linéaires ont été réduites à la forme canonique

$$(6)\qquad A'_1 = a'_1, \qquad A'_2 = a'_2, \qquad A'_3 = 0, \qquad a'_3 = 0$$

et le raisonnement du *nº* 2 prouve que la relation (2) entraîne

$$B'_1 = b'_1, \qquad B'_2 = b'_2; \tag{7}$$

d'où l'on déduit nécessairement $B'_3 = \pm b'_3$ en vertu de (1).

Si donc $B'_3 = b'_3$, S et S_1 sont égales, à une translation près; si $B'_3 = - b'_3$, S et S_1 sont symétriques par rapport au plan xOy; nous n'avons donc obtenu qu'un cas particulier (courbes C et C_1 planes) d'une solution rejetée *a priori* comme banale.

4. Nous n'avons plus à étudier que le cas $h = 3$. Il se partage dès le début en deux suivant que l'on peut ou non résoudre en A'_1, A'_2, A'_3 les trois relations linéaires supposées existantes entre les a' et A'. Dans la première hypothèse, $\lambda, \ldots, \nu''$ désignant des constantes, j'écris

$$(8) \quad \begin{cases} A'_1 = \lambda\, a'_1 + \mu\, a'_2 + \nu\, a'_3, \\ A'_2 = \lambda' a'_1 + \mu' a'_2 + \nu' a'_3, \\ A'_3 = \lambda'' a'_1 + \mu'' a'_2 + \nu'' a'_3, \end{cases}$$

et la méthode du nº 2 donne

$$(9) \quad \begin{cases} b'_1 = \lambda B'_1 + \lambda' B'_2 + \lambda'' B'_3, \\ b'_2 = \mu B'_1 + \mu' B'_2 + \mu'' B'_3, \\ b'_3 = \nu B'_1 + \nu' B'_2 + \nu'' B'_3, \end{cases}$$

Les relations (1) entraînent

$$(10) \quad \begin{cases} (\lambda\, a'_1 + \mu\, a'_2 + \nu\, a'_3)^2 \\ + (\lambda' a'_1 + \mu' a'_2 + \nu' a'_3)^2 \\ + (\lambda'' a'_1 + \mu'' a'_2 + \nu'' a'_3)^2 = 1, \\ a'^2_1 + a'^2_2 + a'^2_3 = 1. \end{cases}$$

Si les constantes λ, μ, ..., ν'' sont telles que la première équation (10) coïncide avec la seconde, les relations (8) et (9) expriment ou qu'un déplacement d'ensemble de (A) et (B) amène (A) en coïncidence avec (a) et (B) avec (b) ou qu'un déplacement de cette espèce fera coïncider (A) avec la symétrique de (a) par rapport à l'origine et (B) avec la symétrique de (b). Nous retrouvons le déplacement le plus général ou la symétrie la plus générale; notre méthode, correctement appliquée, ne pouvait pas ne pas retrouver cette solution, si banale soit-elle.

Supposons donc les deux équations (10) distinctes; le point a décrit donc une *conique sphérique*. Je prends pour axes de coordonnées les axes de la quadrique Q definie par la première équation (10), qui se réduira donc à la forme

$$l^2 a_1'^2 + m^2 a_2'^2 + n^2 a_3'^2 = 1, \tag{11}$$

où l, m, n, sont trois constantes non nulles toutes trois (réelles ou imaginaires). Il est clair que je devrai distinguer trois cas : $lmn \neq 0$, puis $lm \neq 0$, $n = 0$, puis $l \neq 0$, $m = 0$, $n = 0$. Mais peu importe pour l'instant : dire que la quadrique Q est définie aussi bien par la première équation (10) que par l'équation (11) revient à écrire

$$\left\{\begin{array}{lll} \lambda = lu, & \lambda' = lu', & \lambda'' = lu'', \\ \mu = mv, & \mu' = mv', & \mu'' = mv'', \\ \nu = nw, & \nu' = nw', & \nu'' = nw'', \end{array}\right. \tag{12}$$

le tableau

$$\left|\begin{array}{ccc} u & u' & u'' \\ v & v' & v'' \\ w & w' & w'' \end{array}\right| \tag{13}$$

étant le tableau d'une substitution orthogonale, de sorte que les formules (8) prouvent que la courbe (A_1', A_2', A_3') est égale à la courbe lieu du point (la_1', ma_2', na_3'); par un déplacement d'ensemble de (A) et (B), je supposerai donc

$$A'_1 = la'_1, \qquad A'_2 = ma'_2, \qquad A'_3 = na'_3.$$

les formules (8) et suivantes se réduisent à

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{lll} A'_1 = la'_1, & A'_2 = ma'_2, & A'_3 = na'_3, \\ b'_1 = lB'_1, & b'_2 = mB'_2, & b'_3 = nB'_3, \\ \multicolumn{3}{c}{l^2 a'^2_1 + m^2 a'^2_2 + n^2 a'^2_3 = 1,} \\ \multicolumn{3}{c}{a'^2_1 + a'^2_2 + a'^2_3 = 1,} \end{array} \right.$$

avec, conséquence évidente,

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} l^2 B'^2_1 + m^2 B'^2_2 + n^2 B'^2_3 = 1, \\ B'^2_1 + B'^2_2 + B'^2_3 = 1; \end{array} \right.$$

donc la courbe (B) n'est autre que la courbe (a), et la courbe (A) coïncide avec la courbe (b). Pour continuer, il est nécessaire de spécifier si chaque nombre l, m, n est ou non nul.

5. Supposons d'abord $lmn \neq 0$. J'écris

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{lll} a'_1 = \dfrac{A'_1}{l}, & a'_2 = \dfrac{A'_2}{m}, & a'_3 = \dfrac{A'_3}{n}; \\ B'_1 = \dfrac{b'_1}{l}, & B'_2 = \dfrac{b'_2}{m}, & B'_3 = \dfrac{b'_3}{n}, \end{array} \right.$$

et par suite

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{A'^2_1}{l^2} + \dfrac{A'^2_2}{m^2} + \dfrac{A'^2_3}{n^2} = 1, & \dfrac{b'^2_1}{l^2} + \dfrac{b'^2_2}{m^2} + \dfrac{b'^2_3}{n^2} = 1, \\ A'^2_1 + A'^2_2 + A'^2_3 = 1, & b'^2_1 + b'^2_2 + b'^2_3 = 1. \end{array} \right.$$

La courbe (a) ou (B) est une conique sphérique et la courbe (A) ou (b) est une autre conique sphérique ayant mêmes plans de symétrie. Ces coniques sont *homofocales*.

Pour le voir, supposons choisie une première conique sphérique arbitraire, que je prends pour conique (a). Cette conique pourra être définie par le cône (q)

$$\frac{x^2}{L} + \frac{y^2}{M} + \frac{z^2}{N} = 0, \tag{18}$$

qui sera le cône directeur des tangentes de la courbe C. La quadrique Q sera alors l'une des quadriques du faisceau ponctuel

$$\left(1+\frac{\lambda}{L}\right)x^2 + \left(1+\frac{\lambda}{M}\right)y^2 + \left(1+\frac{\lambda}{N}\right)z^2 = 1, \tag{19}$$

de sorte que

$$l^2 = 1 + \frac{\lambda}{L}, \qquad m^2 = 1 + \frac{\lambda}{M}, \qquad n^2 = 1 + \frac{\lambda}{N}. \tag{20}$$

La constante λ choisie, la quadrique Q est connue, ainsi que la conique (b) intersection de la sphère avec la quadrique Q_1,

$$\frac{Lx^2}{L+\lambda} + \frac{My^2}{M+\lambda} + \frac{Nz^2}{N+\lambda} = 1, \tag{21}$$

qui est d'ailleurs la polaire réciproque de Q par rapport à la sphère. Le cône (q_1) de sommet à l'origine et de directrice (b) a pour équation

$$\frac{x^2}{L+\lambda} + \frac{y^2}{M+\lambda} + \frac{z^2}{N+\lambda} = 0, \tag{22}$$

ce qui prouve bien que les deux coniques (a) et (b) sont homofocales. Ce sont d'ailleurs deux coniques homofocales quelconques, dont l'ensemble dépend des quatre paramètres homogènes L, M, N, λ ou des trois constantes l, m, n. Ces coniques choisies, comment achever?

Supposons donc que sur la conique (a) j'ai exprimé (a'_1, a'_2, a'_3) en fonction d'un certain paramètre t : on a posé $da_1 = a'_1\, d\alpha$; α sera lui-même fonction du paramètre t et je pourrai écrire $d\alpha = \mathfrak{F}(t)\,dt$. Je vais donc écrire, t et t_1 étant deux variables indépendantes :

$$(23)\quad \left\{\begin{array}{l} a'_1 = f_1(t),\quad a'_2 = f_2(t),\quad a'_3 = f_3(t),\quad \dfrac{d\alpha}{dt} = \mathfrak{F}(t),\\ f_1^2(t) + f_2^2(t) + f_3^2(t) = 1,\\ l^2 f_1^2(t) + m^2 f_2^2(t) + n^2 f_3^2(t) = 1,\end{array}\right.$$

$$(24)\quad \left\{\begin{array}{l} b'_1 = l f_1(t_1),\quad b'_2 = m f_2(t_1),\quad b'_3 = n f_3(t_1),\\ \dfrac{d\beta}{dt} = \mathfrak{F}_1(t_1);\end{array}\right.$$

$$(\mathrm{I})\quad \left\{\begin{array}{ll} (\mathrm{S}) & \left\{\begin{array}{l} x = \displaystyle\int f_1(t)\,\mathfrak{F}(t)\,dt + l\int f_1(t_1)\,\mathfrak{F}_1(t_1)\,dt_1,\\ y = \displaystyle\int f_2(t)\,\mathfrak{F}(t)\,dt + m\int f_2(t_1)\,\mathfrak{F}_1(t_1)\,dt_1,\\ z = \displaystyle\int f_3(t)\,\mathfrak{F}(t)\,dt + n\int f_3(t_1)\,\mathfrak{F}_1(t_1)\,dt_1;\end{array}\right.\\ (\mathrm{S}_1) & \left\{\begin{array}{l} \mathrm{X} = l\displaystyle\int f_1(t)\,\mathfrak{F}(t)\,dt + \int f_1(t_1)\,\mathfrak{F}_1(t_1)\,dt_1,\\ \mathrm{Y} = m\displaystyle\int f_2(t)\,\mathfrak{F}(t)\,dt + \int f_2(t_1)\,\mathfrak{F}_1(t_1)\,dt_1,\\ \mathrm{Z} = n\displaystyle\int f_3(t)\,\mathfrak{F}(t)\,dt + \int f_3(t_1)\,\mathfrak{F}_1(t_1)\,dt_1;\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$$(25)\quad \begin{aligned} ds^2 = {} & \mathfrak{F}^2(t)\,dt^2 + \mathfrak{F}_1^2(t_1)\,dt_1^2\\ & + 2[l f_1(t) f_1(t_1) + m f_2(t) f_2(t_1) + n f_3(t) f_3(t_1)]\\ & \times \mathfrak{F}(t)\,\mathfrak{F}_1(t_1)\,dt\,dt_1.\end{aligned}$$

Je remarquerai que, dans certains cas, il sera plus avantageux d'opérer indépendamment sur (a) et sur (b) pour obtenir des expressions paramétriques; dans ce cas on écrirait

$$(24')\quad \left\{\begin{array}{l} b'_1 = \varphi_1(t_1),\quad b'_2 = \varphi_2(t_1),\quad b'_3 = \varphi_3(t_1),\quad \dfrac{d\beta}{dt} = \mathfrak{F}_1(t_1),\\ \varphi_1^2(t_1) + \varphi_2^2(t_1) + \varphi_3^2(t_1) = 1,\\ \dfrac{\varphi_1^2(t_1)}{l^2} + \dfrac{\varphi_2^2(t_1)}{m^2} + \dfrac{\varphi_3^2(t_1)}{n^2} = 1,\end{array}\right.$$

et l'on écrirait pour (S) et (S_1)

$$(\mathrm{I}')\begin{cases}(\mathrm{S}) & x = \int f_1(t)\,\mathfrak{F}(t)\,dt + \int \varphi_1(t_1)\,\mathfrak{F}_1(t_1)\,dt_1,\\ (\mathrm{S}_1) & \mathrm{X} = l\int f_1(t)\,\mathfrak{F}(t)\,dt + \frac{1}{l}\int \varphi_1(t_1)\,\mathfrak{F}_1(t_1)\,dt_1.\end{cases}$$

Ce premier type de solutions dépend de trois constantes arbitraires et de deux fonctions arbitraires d'une variable. La donnée des coniques homofocales (a) et (b) permet de calculer les fonctions $f_1, f_2, f_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$; la donnée de $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}_1$ fixe ensuite S ; mais pour avoir S_1, il faut avoir l, m, n eux-mêmes, tandis que dans les calculs donnant S il suffisait d'avoir l^2, m^2, n^2. Or si l'on change l en $-l$, on remplace S_1 par sa symétrique relativement au plan yOz, ce qui est indifférent à notre point de vue. Donc on pourra choisir arbitrairement les déterminations de l, m, n et l'on a bien *une seule surface correspondant à* S. Mais au point de vue du problème de géométrie sphérique posé au n° 2, nous avons *huit* correspondances ponctuelles possibles entre les points de (a) et (b). Au point de vue de notre problème, si nous opérons avec les formules (I) qui ne contiennent que les fonctions f_1, f_2, f_3 et ne contiennent pas les lettres φ, nous voyons qu'en prenant toutes les combinaisons de signe pour l, m, n nous obtenons bien *huit* couples de *deux* surfaces associées.

Quand les surfaces S et S_1 sont-elles réelles? Un premier cas évident est celui où l, m, n, $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}_1$ sont des constantes ou fonctions réelles. Comme on a

$$l^2 = \frac{\mathrm{L}+\lambda}{\mathrm{L}}, \qquad m^2 = \frac{\mathrm{M}+\lambda}{\mathrm{M}}, \qquad n^2 = \frac{\mathrm{N}+\lambda}{\mathrm{N}},$$

cela entraîne que les deux cônes homofocaux (q) et (q_1) n'aient pas de génératrices communes réelles ; (a) et (b)

n'ont donc pas de points communs réels; si nous les supposons toutes deux dans le même hémisphère, ce qui est permis, on pourra donc les considérer toutes deux comme *ellipses sphériques* relatives à deux points F et F' de cet hémisphère : sous ces rectrictions, (b) sera l'une quelconque des ellipses homofocales à l'ellipse (a).

Il y a un autre cas évident, analogue à celui des surfaces minima; on supposera l, m, n imaginaires mais de module égal à l'unité; on pourra choisir pour t et t_1 des variables conjuguées; les fonctions f_1, f_2, f_3, $\mathcal{F}$ auront respectivement pour conjuguées φ_1, φ_2, φ_3, $\mathcal{F}_1$. En donnant à t toutes les valeurs du champ complexe et prenant toujours pour t_1 l'imaginaire conjuguée de t, on aura tous les points réels de S et S_1; cette fois les réseaux C, Γ, C_1 et Γ_1 sont imaginaires.

Il est bon de démontrer que ce cas est bien le seul à se présenter pour la réalité quand les réseaux de translation sont *imaginaires*. Si l'on admet que S et S_1 doivent être réelles toutes deux, c'est immédiat. Mais, à la rigueur, il aurait pu se faire que S par exemple soit réelle et S_1 imaginaire, de sorte qu'il faut démontrer rigoureusement ce point. Cela aura d'ailleurs pour la suite l'avantage de nous donner une forme intéressante des nombres l, m, n, L, M, N, λ.

Si la surface S est réelle, les courbes C et Γ sont deux à deux imaginaires conjuguées; les cônes directeurs des tangentes, c'est-à-dire (q) et (q_1) sont imaginaires conjuguées. Appelons L', M', N' les quantités imaginaires conjuguées de L, M, N; on aura

$$(26)\qquad \frac{L+\lambda}{L'} = \frac{M+\lambda}{M'} = \frac{N+\lambda}{N'}.$$

Posons

$$L = \rho\, e^{i\varphi}, \qquad M = \rho_1\, e^{i\varphi_1}, \qquad N = \rho_2\, {}^{i\varphi_2};$$

soit $k_1 + ik_2$ la valeur commune des rapports (26) : on a immédiatement, si $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$,

$$(27)\qquad \begin{cases} \rho\cos\varphi + \lambda_1 = (k_1\cos\varphi + k_2\sin\varphi)\rho, \\ \rho\sin\varphi + \lambda_2 = (-k_1\sin\varphi + k_2\cos\varphi)\rho; \end{cases}$$

par élimination de ρ, on a

$$(28)\qquad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{(k_1-1)\cos\varphi + k_2\sin\varphi}{k_2\cos\varphi - (k_1+1)\sin\varphi}.$$

Cette relation est vérifiée encore si φ est remplacé par φ_1 ou φ_2; notre méthode a écarté $\lambda = 0$ puisque alors on aurait $l^2 = m^2 = n^2 = 1$; l'équation (28) est du premier degré en $\tang\varphi$; si $\tang\varphi_1$, $\tang\varphi_2$, $\tang\varphi_3$ étaient égales, L, M, N seraient proportionnels à trois nombres réels, le cône (q) serait réel, cas qui n'est pas réalisé ici; donc la fraction en $\tang\varphi$ qui est au second membre de (28) doit se réduire à une constante indépendante de φ, autrement dit $(k_1-1)(k_1+1)+k_2^2 = 0$; $k_1 + ik_2$ est donc une certaine imaginaire de module unité, soit $e^{i\omega}$. Or je peux sans changer (q) ni (q_1) multiplier L, M, N et λ par $e^{-\frac{i\omega}{2}}$, auquel cas L', M', N' sont multipliés par $e^{\frac{i\omega}{2}}$, la valeur commune des rapports (26) a été ainsi ramenée à l'unité et l'on a

$$\lambda = L' - L = M' - M = N' - N;$$

autrement dit, L, M, N ont même partie imaginaire et λ est une imaginaire pure; puis

$$l^2 = 1 + \frac{\lambda}{L} = \frac{L'}{L}, \qquad m^2 = \frac{M'}{M}, \qquad n^2 = \frac{N'}{N}$$

et l'on a bien retrouvé le résultat annoncé.

Il y a une autre circonstance intéressante à signaler au point de vue de la théorie générale de l'application; supposons que les deux coniques (a) et (b) soient réelles toutes deux, mais se coupent en des points réels (en vertu des symétries, les huit points d'intersection sont tous réels); la conique (a) donne trois fonctions réelles $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$, et la conique (b) trois fonctions réelles $\varphi_1(t_1)$, $\varphi_2(t_1)$, $\varphi_3(t_1)$. En choisissant $\mathcal{F}(t)$ et $\mathcal{F}_1(t_1)$ réelles, la surface S est réelle à réseaux de translation réels et l'on voit aisément que deux des rapports $\frac{L+\lambda}{L}$, $\frac{M+\lambda}{M}$, $\frac{N+\lambda}{N}$ sont positifs et l'autre négatif : si par exemple $L > M > N$, $L+\lambda$ et L sont tous deux positifs, $N+\lambda$ et N sont négatifs, puisque les cônes (q) et (q_1) sont réels, et $M+\lambda$ et M sont de signe contraire, sinon (a) et (b) seraient non sécantes; alors l et n sont réels, m est une imaginaire pure; les coordonnées X et Z sont réelles et Y est une imaginaire pure, la surface S est réelle et la surface S_1 est imaginaire; si l'on pose $Y = iY'$, on a deux surfaces réelles $S(x, y, z)$ et $S'(X, Y' = iY, Z)$ telles que

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dX^2 + dZ^2 - dY'^2.$$

M. Darboux a attiré l'attention sur cette particularité lorsque l'on cherche les surfaces correspondant à un élément réel donné (*Théorie des surfaces*, t. III, p. 225). Il est même intéressant de remarquer qu'ici on peut écrire sous ces hypothèses

$$dx^2 + dy^2 + dY'^2 = dX^2 + dZ^2 - dz^2;$$
$$dx^2 + dY'^2 + dz^2 = dX^2 + dZ^2 - dy^2$$

et

$$dY'^2 + dy^2 + dz^2 = dX^2 + dZ^2 - dx^2,$$

de sorte que nous avons non pas un seul couple, mais quatre couples de surfaces de translation mis en évidence d'un seul coup :

$$(29)\qquad \left\{\begin{array}{llllll} x, & y, & z; & \mathrm{X}, & i\mathrm{Y}', & \mathrm{Z}; \\ x, & y, & \mathrm{Y}'; & \mathrm{X}, & iz, & \mathrm{Z}; \\ x, & \mathrm{Y}', & z; & \mathrm{X}, & iy. & \mathrm{Z}; \\ \mathrm{Y}', & y, & z; & \mathrm{X}, & ix, & \mathrm{Z}, \end{array}\right.$$

tels que dans chaque couple une seule des deux surfaces soit réelle avec un réseau de translation réel. En changeant ensuite une des trois fonctions φ de signe, nous aurons même *trente-deux* couples.

(*A suivre.*)