

R. GARNIER

**À propos de la composition de calcul
différentiel et intégral du concours
d'agrégation de juillet 1919**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 20
(1920), p. 263-275

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__263_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1920, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**A PROPOS DE LA COMPOSITION DE CALCUL DIFFÉ-
RENTIEL ET INTÉGRAL DU CONCOURS D'AGRÉGATION
DE JUILLET 1919;**

PAR M. R. GARNIER.

La composition d'Analyse du concours d'Agrégation de juillet 1919 comportait deux parties distinctes (1); la seconde partie donnait lieu, incidemment, à un exercice sur la théorie des équations linéaires aux différences finies, exercice dont la solution n'était d'ailleurs pas exigée. Il nous a paru utile de faire connaître cette solution, que nous avons fait précéder de quelques remarques sur le problème proprement dit, proposé aux candidats.

1. Soit $\varphi(x)$ une fonction répondant aux conditions de l'énoncé; attribuons à x la valeur $\frac{\nu}{p}$ ($\nu = 0, 1, \dots, p-1$) et supposons que l'on ait

$$\frac{f_\nu}{n} \leq \varphi\left(\frac{\nu}{p}\right) \leq \frac{f_{\nu+1}}{n} \quad (f_\nu = 0, 1, \dots, n-1);$$

(1) Voir l'énoncé ci-dessus, p. 260.

l'oscillation de $\varphi(x)$ dans l'intervalle

$$(1) \quad \frac{\nu}{p} \leq x \leq \frac{\nu+1}{p}$$

devant être inférieure à $\frac{1}{n}$, on aura

$$(2) \quad f_{\nu+1} = f_{\nu} + \rho \quad (\rho = -1, 0 \text{ ou } +1);$$

le second membre devant d'ailleurs être remplacé par 0 ou par n dans le cas où il serait égal à -1 ou à $n+1$. Soit alors x une valeur quelconque de l'intervalle (1); je dis qu'on aura

$$(3) \quad \frac{f_{\nu-1}}{n} + \rho \psi\left(x - \frac{\nu}{p}\right) < \varphi(x) < \frac{f_{\nu+2}}{n} + \rho \psi\left(x - \frac{\nu}{p}\right),$$

en désignant par $\psi(x)$ une fonction, définie et continue pour $0 \leq x \leq \frac{1}{p}$ et telle que

$$\psi(0) = 0, \quad \psi\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{n}, \quad 0 \leq \psi(x) \leq \frac{1}{n} \quad (1).$$

En effet, les inégalités (3) sont évidentes pour $\rho = 0$; et, pour $\rho = +1$, par exemple, on aura (2) :

$$\begin{aligned} \varphi(x) > \varphi\left(\frac{\nu+1}{p}\right) - \frac{1}{n} &\geq \frac{f_{\nu+1}-1}{n} = \frac{f_{\nu}}{n} \\ &\geq \frac{f_{\nu}}{n} - \left[\frac{1}{n} - \psi\left(x - \frac{\nu}{p}\right)\right] \end{aligned}$$

et

$$\varphi(x) < \varphi\left(\frac{\nu}{p}\right) + \frac{1}{n} \leq \frac{f_{\nu}+1}{n} + \frac{1}{n} \leq \frac{f_{\nu+2}}{n} + \psi\left(x - \frac{\nu}{p}\right).$$

Or, les relations (3) montrent qu'on peut prendre

(1) Par exemple, on pourra prendre $\psi(x) = \frac{px}{n}$.

(2) La représentation graphique, que nous omettons, rend la démonstration intuitive.

pour couple de fonctions $h_i(x)$, $g_i(x)$ tout couple de fonctions telles que, dans (1) on ait, pour certaines valeurs de f_v et de ρ ,

$$\begin{aligned} g_i(x) &= \frac{f_v - 1}{n} + \rho \psi\left(x - \frac{v}{p}\right), \\ h_i(x) &= \frac{f_v + 2}{n} + \rho \psi\left(x - \frac{v}{p}\right) \quad (1), \end{aligned}$$

la $\left\{ \begin{array}{l} \text{première} \\ \text{seconde} \end{array} \right\}$ de ces relations devant être remplacée par $\left\{ \begin{array}{l} g_i(x) = 0 \\ h_i(x) = 1 \end{array} \right\}$, si le second membre est $\left\{ \begin{array}{l} < 0 \\ > 1 \end{array} \right\}$. Toutes les conditions imposées au couple $g_i(x)$, $h_i(x)$ seront vérifiées, et le nombre des couples ainsi introduits est évidemment inférieur à l'entier n . 3^o qu'on peut donc prendre comme limite supérieure du nombre 1. C'est précisément le calcul exact du nombre s que nous nous proposons d'effectuer (2).

2. Pour cela, nous commencerons par poser sous une forme plus intuitive le problème de la détermination de s . Considérons dans le plan xOy l'ensemble des $n(p+1)$ points M'_j qui ont pour coordonnées

$$x = v, \quad y = j \quad (v = 0, 1, \dots, p; j = 1, 2, \dots, n).$$

Joignons les points de deux colonnes consécutives $x = v$ et $x = v + 1$ par tous les segments rectilignes de coefficients angulaires -1 , 0 , ou $+1$. A chaque couple $g_i(x)$, $h_i(x)$ correspond, comme image dans le dia-

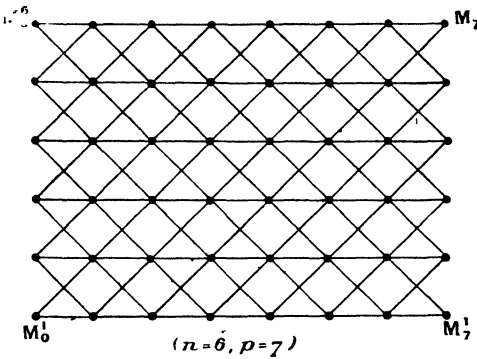
(1) La solution du 5^o de l'énoncé s'obtiendrait par un procédé analogue; on prendrait $n > \frac{1}{\omega}$, $\rho < kn$, et la fonction $\psi(x)$ serait assujettie en outre à la condition d'avoir pour $0 \leq x \leq \frac{1}{p}$ une dérivée continue nulle aux extrémités de l'intervalle, et au plus égale à k .

(2) L'expression de s est donnée à la fin du n^o 4 [éq. (16)].

gramme précédant une ligne brisée, dont les sommets consécutifs ont pour coordonnées

$$x = v, \quad y = f_{v+1} \quad (v = 0, \dots, p)$$

et dont les coefficients angulaires ρ sont -1 , 0 ou $+1$. Le nombre s est donc égal au nombre total de toutes les lignes brisées, partant d'un point de la colonne de gauche ($x = 0$) du diagramme et aboutissant à l'un quelconque des points de la colonne de droite ($x = p + 1$), ces lignes brisées devant être formées à l'aide de segments du diagramme, et n'admettant comme sommets que des points M'_i du diagramme.



En général, pour passer d'une colonne $x = v$ à la suivante, $x = v + 1$, on a le choix entre trois valeurs de ρ ; toutefois, sur les lignes extrêmes (pour $f_v = 0$ ou $n - 1$), il n'y a plus que deux directions possibles pour le nouveau côté de la ligne brisée; et c'est précisément cette irrégularité qui complique le calcul de s .

3. Pour calculer le nombre s , nous supposons n pair, soit $n = 2m$, le cas opposé se traitant, d'ailleurs, d'une

façon analogue, et nous appellerons ⁽¹⁾ u_v^j le nombre de toutes les lignes brisées, issues de l'un quelconque des points M_0^i ($i = 1, \dots, n$) et aboutissant, suivant la manière indiquée plus haut, au point M_v^j . Nous aurons immédiatement

$$s = 2 \sum_{j=1}^m u_v^j,$$

et tout reviendra à calculer les u_v^j . Or, ces nombres satisfont évidemment aux équations linéaires aux différences finies :

$$(4) \quad \begin{cases} u_{v+1}^1 = u_v^1 + u_v^2, \\ u_{v+1}^2 = u_v^1 + u_v^2 + u_v^3, \\ u_{v+1}^3 = u_v^2 + u_v^3 + u_v^4, \\ \dots\dots\dots \\ u_{v+1}^{m-1} = u_v^{m-2} + u_v^{m-1} + u_v^m, \\ u_{v+1}^m = u_v^{m-1} + 2u_v^m, \end{cases}$$

en même temps qu'aux conditions initiales

$$(5) \quad u_0^j = 1 \quad (j = 1, \dots, m).$$

Le problème se ramène donc à déterminer la solution de (4) qui satisfait à (5). Or le système (4) possède m solutions particulières de la forme

$$(6) \quad U_{v,k}^j = Q_{j,k}(1 + S_k)^v,$$

les $Q_{j,k}$ étant indépendants de v , et S_k désignant l'une

(1) Pour u_v^j , et plus loin pour U_v^j , j a le sens d'un indice; partout ailleurs, l'indice supérieur désignera un exposant.

des racines de l'équation caractéristique (d'ordre m) .

$$(7) \quad f_m(S) \equiv \begin{vmatrix} S & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & S & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & S & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & S & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & S-1 \end{vmatrix} = 0.$$

Calculons d'abord les S_k . Or $f_m(S)$ satisfait à l'équation aux différences

$$(8) \quad y_m - S y_{m-1} + y_{m-2} = 0,$$

et l'on a $f_1 = S - 1$, $f_2 = S^2 - S - 1$, d'où, si l'on veut,

$$(9) \quad f_0 = 1, \quad f_1 = S - 1.$$

Mais la solution générale de (8) est de la forme

$$f_m = A \sigma_1^m + B \sigma_2^{-m},$$

A et B étant indépendants de m , et σ_1 , σ_2 étant racines de l'équation

$$\sigma^2 - S\sigma + 1 = 0.$$

Pour simplifier l'écriture, posons

$$S = x + \frac{1}{x};$$

il viendra $\sigma_1 = \frac{1}{x}$, $\sigma_2 = x$, et, en écrivant que les conditions (9) sont vérifiées,

$$A + B = 1,$$

$$A + Bx^2 = 1 - x + x^2,$$

d'où

$$A : B : 1 = 1 : x : x + 1$$

et enfin

$$f_m = \frac{1}{x+1} \left(\frac{1}{x^m} + x^{m+1} \right).$$

Ainsi donc, x satisfait à l'équation

$$x^{2m+1} + 1 = 0,$$

et l'on en déduit

$$x_k = e^{\frac{(2k+1)\pi i}{2m+1}} \quad \text{et} \quad S_k = 2 \cos \frac{(2k+1)\pi}{2m+1}$$

($k = 0, 1, \dots, m-1$).

Passons maintenant aux $Q_{j,k}$; ils sont proportionnels aux mineurs extraits de la matrice formée par les $m-1$ premières lignes de (7) (où l'on aurait remplacé S par S_k). On en déduit aisément que les $Q_{j,k}$ (où k est fixe) vérifient, eux aussi, l'équation (8) (où l'on aurait remplacé S par S_k); en outre, on a immédiatement $Q_{1,k} = 1$, $Q_{2,k} = S_k$, d'où, si l'on préfère,

$$Q_{0,k} = 0, \quad Q_{1,k} = 1$$

et, par conséquent,

$$Q'_{j,k} = C_k x'_k + D_k x_k^{-j},$$

avec

$$C_k + D_k = 0,$$

$$C_k + D_k x_k^2 = x_k.$$

On a donc

$$Q_{j,k} = \frac{x'_k - x_k^{-j}}{x_k - x_k^{-1}}.$$

Supprimons le facteur commun $(x_k - x_k^{-1})^{-1}$ sans intérêt, et nous pourrions adopter enfin, comme système fondamental de solutions des équations (4), les expressions

$$(10) \quad \bar{U}'_{j,k} = (x'_k - x_k^{-j}) \left[1 + 2 \cos \frac{(2k+1)\pi}{2m+1} \right]^y.$$

Dès lors, les solutions u'_j , qui nous sont nécessaires,

sont de la forme

$$(11) \quad u'_j = \sum_{k=0}^{m-1} A_k \bar{U}'_{j,k},$$

les A_k étant définis, d'après (5), par les équations

$$(12) \quad \sum_{k=0}^{m-1} A_k (x'_k - x_{\bar{k}}^{-j}) = 1,$$

qu'il nous reste à résoudre.

4. A cet effet, considérons la fonction rationnelle

$$\sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{A_k}{x - x_k} - \frac{A_k}{x - x_{\bar{k}}^{-1}} \right) - \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x} + \dots + \frac{1}{x^{m-1}} \right)$$

de la variable auxiliaire x . En vertu de (12), cette fonction possède $x = \infty$ comme zéro d'ordre $m+2$ au moins; on a donc

$$(13) \quad \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{A_k}{x - x_k} - \frac{A_k}{x - x_{\bar{k}}^{-1}} \right) - \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x} + \dots + \frac{1}{x^{m-1}} \right) = \frac{C_{2m} x^{2m} + \dots + C_0}{x^{m+1} (x^{2m+1} + 1)},$$

les C étant des constantes. Dans cette relation, changeons x en x^{-1} , et divisons les deux membres de la relation obtenue par x^2 ; la somme Σ ne change pas, et l'on aura

$$(14) \quad \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{A_k}{x - x_k} - \frac{A_k}{x - x_{\bar{k}}^{-1}} \right) - (1 + \dots + x^{m-1}) = \frac{C_0 x^{2m} + \dots + C_{2m} x^m}{x^{2m+1} + 1}.$$

Retranchons membre à membre (14) de (13), et il viendra

$$(x^{2m+1} + 1) \left(x^{m-1} + \dots + 1 - \frac{1}{x^2} - \dots - \frac{1}{x^{m+1}} \right) \\ = -C_0 x^{2m} - \dots - C_{2,m} x^m + C_{2,m} x^{m-1} + \dots + C_0 x^{-m-1},$$

identité en x , qui fournit pour les C les valeurs

$$C_0 = C_1 = \dots = C_{m-1} = -1, \quad C_m = 0, \\ C_{m+1} = \dots = C_{2m-1} = C_{2m} = +1,$$

et l'on aura, en conséquence,

$$\sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{A_k}{x - x_k} - \frac{A_k}{x - x_k^{-1}} \right) \\ = \frac{1}{x^2} \left(1 + \dots + \frac{1}{x^{m-1}} \right) \\ + \frac{x^{2m} + \dots + x^{m+1} - (x^{m-1} + \dots + 1)}{x^{m+1}(x^{2m+1} + 1)}.$$

De cette relation, on déduit, en égalant de part et d'autre les résidus pour $x = x_k$,

$$A_k = -\frac{1}{2m+1} \frac{1}{x_k^m} (x_k^{m-1} + \dots + 1) (x_k^{m+1} - 1) \\ = -\frac{(x_k^m - 1)(x_k^{m+1} - 1)}{(2m+1)x_k^m(x_k - 1)} \\ = \frac{1}{2m+1} \frac{x_k + 1}{x_k - 1} \\ = \frac{1}{(2m+1)i} \cot \frac{(2k+1)\pi}{2(2m+1)}.$$

Introduite dans (11), cette valeur donne, en vertu de (10),

$$(15) \quad u_j^v = \frac{2}{2m+1} \sum_{k=0}^{m-1} \cot \frac{(2k+1)\pi}{2(2m+1)} \sin \frac{(2k+1)j\pi}{2m+1} \\ \times \left[1 + 2 \cos \frac{(2k+1)\pi}{2m+1} \right]^v,$$

et l'on aura enfin, grâce à une sommation facile,

$$s = \frac{2}{2m+1} \sum_{k=0}^{m-1} \cot^2 \frac{(2k+1)\pi}{2(2m+1)} \left[1 + 2 \cos \frac{(2k+1)\pi}{2m+1} \right]^p.$$

Comme nous l'avons dit, la même méthode s'applique pour n impair; on obtiendra ainsi pour s deux expressions qu'on peut réunir dans la suivante (qui résout la question proposée) :

$$(16) \quad s = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cot^2 \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)} \left[1 + 2 \cos \frac{(2k+1)\pi}{n+1} \right]^p.$$

§. Avant d'indiquer les applications des formules (15) et (16), observons d'abord que *les u_j peuvent être obtenus par un procédé régulier de calcul*. Formons un Tableau de $p+1$ colonnes et n lignes, le nombre u_j devant occuper la $(j+1)^{\text{ième}}$ colonne, à partir de la gauche, et la $j^{\text{ième}}$ ligne à partir du haut ou du bas (ce qui suppose d'ailleurs $2j < n$). Cela étant, d'après (4), la première colonne du Tableau ne contiendra que des unités; et chaque élément d'une colonne sera la somme des 3 (ou 2) éléments de la colonne de gauche occupant la même ligne et les (ou la) lignes immédiatement voisines. L'application de ce procédé, pour $n = 3$, $p = 8$, donne ainsi le Tableau :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|----|----|----|-----|-----|------|
| 1 | 2 | 5 | 12 | 29 | 70 | 169 | 408 | 985 |
| 1 | 3 | 7 | 17 | 41 | 99 | 239 | 577 | 1393 |
| 1 | 2 | 5 | 12 | 29 | 70 | 169 | 408 | 985 |

Or, pour $n = 3$, la formule (16) donne

$$s = \frac{1}{2} \left[(1 + \sqrt{2})^{p+2} + (1 - \sqrt{2})^{p+2} \right];$$

actuellement sa vérification est immédiate. On vérifierait de même les formules

$$s = \frac{2}{5} \left[(5 + 2\sqrt{5}) \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^p + (5 - 2\sqrt{5}) \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^p \right]$$

qui correspondent respectivement à $n = 1$, $n = 2$, $n = 4$.

Servons-nous maintenant de la formule (16) pour obtenir des *valeurs asymptotiques du nombre s*. Tout d'abord, *supposons n fixe* et faisons croître p indéfiniment; nous obtiendrons comme expression asymptotique de s :

$$\frac{2}{n+1} \cot^2 \frac{\pi}{2(n+1)} \left(1 + 2 \cos \frac{\pi}{n+1} \right)^p;$$

n restant fixe, le rapport de deux valeurs consécutives de s tend donc vers $1 + 2 \cos \frac{\pi}{n+1}$, et l'on peut déduire de là un procédé de calcul approché de $\cos \frac{\pi}{n+1}$. C'est ainsi que pour $n = 3$, $p = 7$ et $p = 8$, le Tableau précédent donne respectivement $s = 1393$, et $s = 3363$; or, on a ⁽¹⁾

$$\frac{3363}{1393} = 2,414213 | 9 \dots$$

Supposons maintenant que p et n croissent indéfiniment de telle sorte que $\frac{p \frac{1}{2} \log n}{n}$ tende vers zéro, par exemple. Le facteur $\left[1 + 2 \cos \frac{(2k+1)\pi}{n+1} \right]^p$ est alors asymptote à 3^p pour $0 \leq k \leq \log n$; d'autre part, l'ex-

(1) Le rapprochement entre ce mode de calcul et la théorie des fractions continues est immédiat.

pression

$$\frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^{\log n} \cot^2 \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}$$

a pour valeur asymptotique

$$\frac{8n}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\log n} \frac{1}{(2k+1)^2},$$

c'est-à-dire n ; la valeur asymptotique de s est donc alors $n.3^p$: c'est l'expression approchée évidente que nous avons indiquée plus haut (n° 1).

6. Terminons enfin par une application de la formule (15). Prenons, par exemple, $j = 1$ et supposons $v = p < n$, auquel cas u_p^1 est manifestement indépendant de n ; faisons donc croître n indéfiniment : à la limite on pourra écrire encore :

$$(17) \quad u_p^1 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x (1 + 2 \cos 2x)^p dx \quad (n > p),$$

formule remarquable, aisée à vérifier pour les premières valeurs de u_p^1 :

$$(1, 2, 5, 13, 35, 96, 267, 750, 2123, 6046, \dots).$$

Cherchons la valeur asymptotique du second membre de (17) pour $p = \infty$. Posons

$$\sin^2 x = y,$$

il viendra

$$\begin{aligned} u_p^1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 y^{-\frac{1}{2}} (1-y)^{\frac{1}{2}} (3-4y)^p dy \\ &= \frac{2}{\pi} 3^p \int_0^1 y^{-\frac{1}{2}} (1-y)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{4y}{3}\right)^p dy, \end{aligned}$$

(275)

c'est-à-dire, en faisant $\frac{4y}{3} = \frac{z}{p}$,

$$u_p^1 = \frac{2}{\pi} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{3^p}{p^{\frac{1}{2}}} \int_0^{\frac{4p}{3}} z^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{3z}{4p}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{z}{p}\right)^p dz.$$

Mais la dernière intégrale est uniformément convergente pour $p = \infty$; elle tend donc vers

$$\int_0^{+\infty} z^{-\frac{1}{2}} e^{-z} dz = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi^{\frac{1}{2}},$$

et la valeur asymptotique de u_p^1 ($n > p$) est

$$3^p \sqrt{\frac{3}{p\pi}}.$$

Théoriquement du moins, on pourrait déduire de ce résultat (ou d'autres analogues) un procédé pour évaluer le nombre π .