Agrégation des sciences mathématiques (juillet 1919) ; problème de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 20 (1920), p. 260-263

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__260_1>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (JUILLET 1919); PROBLÈME DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

PREMIÈRE PARTIE.

Appelons R, θ, φ *les coordonnées sphériques d'un point dont les coordonnées rectangulaires sont* x, y, z, *de sorte que*

$$x = \mathrm{R}\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = \mathrm{R}\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = \mathrm{R}\cos\theta.$$

On considère la surface S dont l'équation est

$$R = a\,e^{u},$$

a étant une constante, e la base des logarithmes népériens et u la fonction

$$u = \lambda\varphi + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} \sqrt{\lambda^2 - \cos^2\theta}\, d\theta,$$

où λ est une constante donnée.

1° *On demande de former les équations différentielles des lignes asymptotiques et des lignes de courbure de* S.

2° *Montrer que dans les deux équations on peut séparer les variables.*

3° *Prouver que toutes les lignes de courbure de* S *(de l'une quelconque des deux familles) sont semblables. De même pour les lignes asymptotiques.*

4° *Considérer le cas où* $\lambda = 1$.

DEUXIÈME PARTIE.

1° *On considère les fonctions réelles* $\varphi(x)$ *qui sont continues sur l'intervalle* J : $0 \leqq x \leqq 1$, *et telles que*

$$0 < \varphi(x) < 1.$$

2° *Parmi ces fonctions, envisageons d'abord celles dont l'oscillation reste inférieure à* $\frac{1}{n}$ *dans tout intervalle partiel de longueur* $\frac{1}{p}$.

Montrer qu'il existe un nombre fini 2 s de fonctions

$$g_1(x),\quad h_1(x),\quad g_2(x),\quad h_2(x),\quad \ldots,\quad g_s(x),\quad h_s(x)$$

qui sont continues sur J *et telles que*

$$0 \leqq h_1(x) < g_1(x) \leqq 1, \qquad \ldots, \qquad 0 \leqq h_s(x) < g_s(x) \leqq 1,$$
$$g_1(x) - h_1(x) \leqq \frac{3}{n}, \qquad \ldots, \qquad g_s(x) - h_s(x) \leqq \frac{3}{n},$$

de sorte qu'à chacune des fonctions $\varphi(x)$ *envisagées, on peut assigner un des couples* $g_i(x)$, $h_i(x)$ *satisfaisant sur* J *aux conditions*

$$h_i(x) < \varphi(x) < g_i(x).$$

3° *On demande, non seulement de prouver l'existence des fonctions* g, h *en nombre fini, mais, parmi tous les choix possibles, d'en définir au moins un explicitement connaissant seulement* n *et* p.

4° *Si l'on ne peut fixer en fonction de* n *et* p *la plus petite valeur possible du nombre* s *des couples* g, h, *on demande de déterminer au moins une fonction algébrique simple de* p *et* n *qui soit une des valeurs possibles de* s.

5° *Parmi les fonctions* $\varphi(x)$ *décrites au paragraphe* 1°, *considérons seulement maintenant celles qui admettent partout sur* J *une dérivée* φ'_x *dont la valeur absolue reste inférieure ou au plus égale à un nombre déterminé* $k > 0$. *Montrer que si* λ, ω *sont deux nombres arbitraires, l'un supérieur à* k, *l'autre à zéro, il existe un nombre fini* $2t$ *de fonctions* $q_1(x)$, $r_1(x)$, $\ldots$, $q_t(x)$, $r_t(x)$ *admettant partout sur* J *une dérivée continue dont la valeur absolue reste inférieure à* λ *et telles que*

$$0 \leqq r_1(x) < q_1(x) \leqq 1, \qquad \ldots, \qquad 0 \leqq r_t(x) < q_t(x) \leqq 1,$$
$$q_1(x) - r_1(x) < \omega, \qquad \ldots, \qquad q_t(x) - r_t(x) < \omega,$$

de sorte qu'à chacune des fonctions $\varphi(x)$ *envisagées* *maintenant, on peut assigner un des couples* $q_i(x)$, $r_i(x)$, *satisfaisant sur* J *aux conditions*

$$r_i(x) < \varphi(x) < q_i(x).$$