NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MAURICE FRÉCHET

Sur un défaut de la méthode d'interpolation par les polynômes de Lagrange

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 20 (1920), p. 241-249
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__241_0>

[A5b]

SUR UN DÉFAUT DE LA MÉTHODE D'INTERPOLATION PAR LES POLYNOMES DE LAGRANGE ;

PAR M. MAURICE FRÉCHET.

(Université de Strasbourg.)

INTRODUCTION.

1. Le procédé qui consiste à représenter approximativement une fonction $y = f(x)$ par un polynome P_n de degré n égal à la fonction donnée pour $n+1$ valeurs de la variable, n'est pas à l'abri de toute critique.

Méray a fait remarquer que rien ne prouvait que ce procédé fût légitime. Runge, en poussant les calculs sur un des exemples simples donnés par Méray, celui de la fonction $\frac{1}{1+x^2}$, Borel, par une méthode toute différente, ont montré que la multiplication indéfinie des points où la fonction $f(x)$ et le polynome $P_n(x)$ coïncident n'entraîne pas la convergence de $P_n(x)$ vers $f(x)$ aux autres points.

2. Un autre défaut du même procédé a été remarqué par de la Vallée Poussin : c'est *d'exagérer l'influence des erreurs d'observation*. Autrement dit, si les valeurs $y_0+\varepsilon_0$, $y_1+\varepsilon_1$, ..., $y_n+\varepsilon_n$ utilisées pour déterminer $P_n(x)$ aux points x_0, x_1, ..., x_n ne sont égales aux valeurs correspondantes y_0, y_1, ..., y_n de $f(x)$ qu'à une certaine approximation près, il en résulte pour la valeur de $P_n(x)$, en un point différent des précédents, une erreur qui peut devenir, pour des valeurs assez grandes de n, beaucoup plus grande que cette approximation.

3. Toutefois, il faut remarquer que si cette circonstance ne se produisait qu'en des points isolés ou dans des intervalles dont la longueur totale tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$, ce défaut de la méthode ne serait pas très grave. (Il pourrait, par exemple, ne présenter aucun inconvénient pour l'intégration.)

Le but de cette Note est de montrer qu'il n'en est pas ainsi, de compléter par conséquent la remarque de la Vallée Poussin en prouvant que l'exagération de l'influence des erreurs d'observation qui d'après lui a au moins lieu en un point (et par suite dans un petit intervalle) peut se présenter effectivement *dans une suite d'intervalles dont la longueur totale peut devenir et rester aussi voisine qu'on voudra de la moitié de la longueur de l'intervalle d'interpolation*, à partir d'un nombre d'observations suffisamment grand.

4. Avant de passer à la démonstration, il y a lieu de remarquer que les défauts signalés par Méray et par de la Vallée Poussin présentent un champ d'application très différent. Pour rencontrer la singularité de Méray, il faut s'adresser à une fonction $f(x)$ elle-même singulière.

Il faut supposer au moins que $f(x)$ n'est pas holomorphe dans un certain intervalle comprenant l'intervalle d'interpolation. Au contraire, la singularité de la Vallée Poussin (et c'est ce qui en fait la gravité) est *indépendante de la fonction* $f(x)$ qu'il s'agit de représenter.

On fait disparaître le premier défaut en n'appliquant la méthode qu'à des fonctions $f(x)$ suffisamment régulières. On ne peut espérer faire disparaître le second qu'en choisissant convenablement les points x_1, x_2, ..., x_n. Ce serait une question intéressante à étudier. (On sait déjà, grâce à Tchebicheff, qu'il y a avantage dans certains cas à utiliser comme points de base dans la méthode d'interpolation appliquée à un intervalle (a, b) les points

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{(2i+1)\Pi}{2n+1}.$$

CALCUL DE L'EFFET DES ERREURS D'OBSERVATION.

5. Le polynome de degré n, $P_n + \Delta P_n$, qui prend aux points x_i les valeurs $y_i + \varepsilon_i$, est

$$P_n + \Delta P_n = \sum_{i=o}^{i=n} (y_i + \varepsilon_i)\, Q_n^{(i)}(x),$$

avec

$$Q_n^{(i)}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}$$

et l'erreur ΔP_n que l'on commet sur P_n en remplaçant les y_i par les $y_i + \varepsilon_i$ est la somme d'erreurs $\Delta P_n^{(i)}$ dues chacune à une seule erreur ε_i avec

$$\Delta P_n^{(i)}(x) = \varepsilon_i\, Q_n^{(i)}(x).$$

On voit que l'erreur ΔP_n^i due à l'erreur ε_i est bien, comme nous l'avons fait remarquer, indépendante de la fonction $f(x)$.

6. Nous allons nous placer avec de la Vallée Poussin dans le cas classique des ordonnées équidistantes en supposant pour simplifier $a = 0$, $b = 1$. Si une des observations est faite en un point X, l'abscisse de ce point est une fraction dont le dénominateur est un diviseur de n quand on réduit la fraction à sa plus simple

expression

$$X = \frac{i'}{n'} = \frac{2i'}{2n'} = \frac{3i'}{3n'} = \ldots = \frac{i}{n} = \ldots.$$

Soit ε l'erreur commise sur $f(X)$ (ε serait appelé ε_i dans nos précédentes notations).

Nous allons évaluer l'erreur $\Omega(x) = \Delta P_n^{(i)}(x)$ qui résulte de l'erreur ε et affecte la valeur de $P_n(x)$ en un point x intérieur à l'un des intervalles de base. Nous supposons donc

$$\frac{k-1}{n} < \frac{k-1}{n} + \frac{\omega}{2n} \leqq x \leqq \frac{k}{n} - \frac{\omega}{2n} < \frac{k}{n} \quad \text{avec } 0 < \omega < 1.$$

Pour fixer les idées, supposons que X soit dans la moitié de gauche de l'intervalle de variation et que x soit à droite de X. Il en résulterait $0 \leqq X \leqq \frac{1}{2}$ ou $0 \leqq i \leqq \frac{n}{2}$ et $i \leqq k-1$. Il nous sera même plus commode de supposer exclus les signes d'égalité et par suite de supposer que

$$0 < i < \frac{n}{2}, \quad i < k-1.$$

7. Nous avons alors à évaluer

$$\Omega(x) = \varepsilon Q_n^{(i)}(x)$$
$$= \varepsilon \frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(x-\frac{i-1}{n}\right)\left(x-\frac{i+1}{n}\right)\cdots(x-1)}{\frac{i}{n}\frac{i-1}{n}\cdots\frac{1}{n}\left(\frac{-1}{n}\right)\cdots\left(\frac{i-n}{n}\right)}.$$

Or on a

$$x > \frac{k-1}{n}, \quad x - \frac{1}{n} > \frac{k-2}{n}, \quad \ldots, \quad x - \frac{i-1}{n} > \frac{k-i}{n},$$
$$x - \frac{i+1}{n} > \frac{k-i-2}{n}, \ldots, x - \frac{k-2}{n} > \frac{1}{n}, \; x - \frac{k-1}{n} \geqq \frac{\omega}{2n},$$
$$\frac{k}{n} - x \geqq \frac{\omega}{2n}, \quad \frac{k+1}{n} - x > \frac{1}{n}, \quad \ldots, \quad 1 - x > \frac{n-k}{n};$$

d'où

$$|\Omega(x)| > \varepsilon \frac{\frac{k-1}{n}\frac{k-2}{n}\cdots\frac{k-i}{n}\frac{k-i-2}{n}\cdots\frac{1}{n}\frac{\omega}{2n}\frac{\omega}{2n}\frac{1}{n}\cdots\frac{n-k}{n}}{\frac{i}{n}\frac{i-1}{n}\cdots\frac{1}{n}\frac{1}{n}\cdots\frac{n-i}{n}}$$

$$= \frac{\varepsilon\omega^2}{4(k-i-1)}\frac{(k-1)!(n-k)!}{i!(n-i)!}.$$

Nous voulons démontrer que, quels que soient $\varepsilon > 0$ et ω compris entre 0 et 1, on peut prendre n assez grand pour que

$$|\Omega(x)| > \varepsilon A,$$

A étant un nombre positif donné d'avance.

Il suffit d'obtenir

$$\frac{1}{i(k-i-1)}\frac{(k-1)!}{(i-1)!}\frac{(n-k)!}{(n-i)!} > \frac{4A}{\omega^2}.$$

Or :

$$\frac{(k-1)!}{(i-1)!}\frac{(n-k)!}{(n-i)!} = \frac{i}{n-i}\,\frac{i+1}{n-i-1}\cdots\frac{(k-1)}{n+1-k};$$

les valeurs successives des fractions du second membre vont évidemment en croissant à partir d'une valeur inférieure à 1 puisque $i < \frac{n}{2}$; elles ne pourront dépasser l'unité que si $k-1 > n+1-k$ ou $k-1 > \frac{n}{2}$. Si l'on veut obtenir une valeur suffisamment grande du premier membre, il faudra donc que l'on ait d'abord $k-1 > \frac{n}{2}$, c'est-à-dire que x soit à droite du milieu de l'intervalle de variation.

Mais observons que si l'on change j en $n-j$, $\frac{j}{n-j}$ prend une valeur inverse $\frac{n-j}{j}$; donc tant que $k-1$ ne dépassera pas la valeur $n-i$, le second membre ne dépassera pas la valeur 1, celles de ses fractions qui sont plus grandes que l'unité n'étant que les inverses de certaines des fractions précédentes.

Il faut donc supposer non seulement $k - 1 > \frac{n}{2}$, mais encore au moins $k - 1 > n - i$, c'est-à-dire que x doit être plus éloigné que X du milieu de l'intervalle $(0, 1)$. Ceci étant, on aura

$$(1) \quad |\Omega(x)| > \frac{\varepsilon\omega^2}{4i(k-i-1)} \frac{n-i+1}{i-1} \frac{n-i+2}{i-2} \cdots \frac{k-1}{n+\quad-k},$$

d'où

$$(2) \qquad |\Omega(x)| > \frac{\varepsilon\omega^2}{4i(n-i)} \left(\frac{n-i}{i}\right)^{k-n+i-1}$$

$$= \frac{\varepsilon\omega^2}{4} \frac{1}{(n-i)^2} \left(\frac{n-i}{i}\right)^{k-n+i}$$

ou

$$|\Omega(x)| > \frac{\varepsilon\omega^2}{4} \frac{1}{(1-X)^2} \frac{1}{n^2} \left[\left(\frac{1-X}{X}\right)^{\frac{k}{n}-1+\frac{i}{n}}\right]^n.$$

La quantité $\frac{1-X}{X}$ est une quantité donnée supérieure à l'unité puisque $X < \frac{1}{2}$. Si donc $\frac{k}{n} - 1 + \frac{i}{n}$ est supérieure à une quantité positive α, on aura

$$|\Omega(x)| > \frac{\varepsilon\omega^2}{4} \frac{1}{(1-X)^2} \frac{1}{n^2} \left[\left(\frac{1-X}{X}\right)^{\alpha}\right]^n$$

et par suite, quand ε, ω, X, α sont donnés, le second membre peut devenir supérieur à toute quantité donnée A en prenant n assez grand.

8. Toutefois, récapitulons les conditions d'inégalité que nous avons été conduit à adopter :

$$0 < i < \frac{n}{2}, \quad i < k - 1, \quad n - i < k - 1, \quad \frac{k}{n} - 1 + \frac{i}{n} > \alpha$$

ou

$$o < i < \frac{n}{2} \quad \text{et} \quad k > i + 1; \quad k > n - i + 1, \quad k > n - i + n\alpha.$$

Si l'on prend n assez grand pour que $n\alpha > 1$, on a

$$i + 1 < n - i + 1 < n - i + n\alpha;$$

il reste donc les conditions

$$o < i < \frac{n}{2} \quad \text{et} \quad k > n - i + n\alpha \quad \text{avec} \quad n\alpha > 1.$$

Puisque $X = \frac{i}{n}$ et $k > nx$, il suffira d'écrire

$$o < X < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x > 1 - X + \alpha \quad \text{avec} \quad n > \frac{1}{\alpha}.$$

Ceci suppose (pour que $x < 1$) que l'on a $\alpha < X$.

Donc, enfin, en choisissant pour α un nombre quelconque inférieur à X, on aura

$$|\Omega(x)| > \varepsilon A$$

pour

$$x > 1 - (X - \alpha), \quad n > \frac{1}{\alpha} \quad \text{et} \quad n > n_0,$$

n_0 étant tel que

$$\frac{1}{n^2}\left[\left(\frac{1 - X}{X}\right)^\alpha\right]^n > \frac{4(1 - X)^2}{\omega^2} A \quad \text{pour} \quad n > n_0.$$

Ceci suppose en outre que les distances de x aux extrémités de l'intervalle de base où il est situé sont supérieures à $\frac{\omega}{2n}$.

9. Nous avons donc montré que pour ε, A, ω (< 1) et α $(< X)$ donnés, on a $[\Omega(r)] > \varepsilon A$ non seulement en un point, mais dans l'intérieur de un ou plusieurs intervalles de longueurs $\frac{1 - \omega}{n}$. Quelle est la somme

des longueurs de ces intervalles? Elle est au moins égale à $p\left(\frac{1-\omega}{n}\right)$ si p est le nombre des intervalles de longueur $\frac{1}{n}$ qui suivent l'intervalle de base comprenant le point

$$1-(X-\alpha).$$

Alors

$$s > p\frac{(1-\omega)}{n} \quad \text{avec} \quad \frac{n-p-1}{n} \leqq 1-(X-\alpha) < \frac{n-p}{n}$$

ou

$$\frac{p}{n} \geqq X-\alpha-\frac{1}{n} > X-2\alpha,$$

d'où

$$s > (1-\omega)(X-2\alpha).$$

Ainsi si l'on prend $\alpha < \frac{X}{2}$, on aura

$$\Omega(x) > \varepsilon A$$

dans un ensemble d'intervalles de longueur totale supérieure à $(1-\omega)(X-2\alpha)$ dès que n sera suffisamment grand $\left(n > n_0 \text{ et } n > \frac{1}{\alpha}\right)$, cette valeur de n étant d'ailleurs indépendante du choix de x dans ces intervalles. On voit que si par exemple on prend ω très voisin de 0, X très voisin de $\frac{1}{2}$ (mais plus petit) et α positif mais très petit, la longueur totale de ces intervalles, tous à droite de $\frac{1}{2}$, sera très voisine de $\frac{1}{2}$.

10. Il en résulte bien qu'une erreur aussi minime qu'on le veut sur la valeur employée pour y en l'un X des points de base pourra produire sur le polynome d'interpolation $P_n(x)$ une erreur aussi grande que l'on veut et cela non pas pour des points particuliers de l'intervalle d'interpolation comme l'a montré de la

Vallée Poussin, mais pour un ensemble d'intervalles de longueur totale finie, plus grande à partir d'une certaine valeur de n que les $\frac{2}{3}$ de l'intervalle total, par exemple.

Le raisonnement précédent, non seulement établit notre proposition, mais il donne le moyen de déterminer une valeur de n à partir de laquelle le résultat prévu sera atteint. Cette valeur sera d'autant plus grande qu'on voudra mettre en évidence une inexactitude plus marquée de P_n dans une somme d'intervalles plus étendue.

11. Si l'on voulait faire le calcul effectif de n, il y aurait d'ailleurs avantage à employer pour l'évaluation des factorielles un procédé moins élémentaire, mais aussi moins grossier que celui qui fait passer de l'inégalité (1) à l'inégalité (2).

Il serait intéressant de tracer un graphique représentant $\Omega(x)$ pour les premières valeurs de n. Par exemple on prendrait $X = \frac{1}{3}$ et $n = 3, 6, 9, 12, 15$.