Nouvelles annales de mathématiques

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 20 (1920), p. 236-240

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__236_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2317.

(1917, p 199.)

Sur la symétrique d'une tangente quelconque à une parabole, par rapport au foyer, il y a trois points P_1, P_2, P_3 *dont les distances* P_1M_1, P_2M_2, P_3M_3 *à la courbe sont respectivement égales à leurs distances* P_1F, P_2F, P_3F *au foyer. Démontrer que les points* M_1, M_2, M_3, F *sont concycliques.*
R. GOORMAGHTIGH.

SOLUTION
Par M. R. BOUVAIST.

Une inversion de centre F transforme la proposition à démontrer en la suivante :

Soient F *le point de rebroussement d'une cardioïde* (Γ), m *le centre d'un cercle passant par* F *et tangent à* (Γ), m' *le symétrique de* m *par rapport à* F, *les contacts des trois tangentes à* (Γ) *issues de* m' *sont en ligne droite.*

Soit A le second point d'intersection de (Γ) avec son axe, O le milieu de FA. Γ est la podaire par rapport à F du cercle de diamètre FA, ou encore l'enveloppe des cercles (m) passant par F et ayant leurs centres m_1 sur le cercle de diamètre FO. Soit m_1 un point de ce cercle tel que $\mathrm{FO}m_1 = \frac{\pi}{6}$: le cercle (m_1) touchera son enveloppe en B_1, la droite m_1A_1 étant parallèle à AF; B_1 est un contact de Γ avec sa bitangente; B_2 étant le symétrique de B_1 par rapport à AF, le cercle FB_1B_2 sera symétrique du cercle de diamètre FO par rapport à F. Or le lieu des points d'où l'on peut mener à une quartique tricuspidale trois tangentes ayant leurs contacts en ligne droite est la conique passant par les rebroussements et les contacts de la courbe avec sa bitangente. Pour Γ c'est donc le cercle FB_1B_2, ce qui démontre la proposition.

Autres solutions par MM. P. CARISSAN, J. LEMAIRE, L. MALOUE, un *Abonné*.

La solution de M. J. LEMAIRE contient des développements intéressants, que le manque de place ne nous permet pas de publier *in extenso*. Nous indiquons seulement les théorèmes suivants qu'il rattache à la question 2317 :

1° *Le cercle passant au point de rebroussement d'une cardioïde, et aux deux points où cette courbe est rencontrée par une tangente variable, coupe la tangente de rebroussement en un second point fixe.*

2° *Les trois tangentes, menées à la cardioïde d'un point* A *quelconque du cercle passant par un point de rebroussement et aux points de contact* I *et* J *de la tangente double, ont leurs points de contact sur une même droite* (γ).

3° *Cette droite et la tangente au quatrième point* m_4 *où elle coupe la cardioïde partagent harmoniquement le segment* IJ.

4° *Si* E *est la trace, sur la tangente double, de cette quatrième tangente,* FE *et* FA *sont symétriques par rapport à la tangente de rebroussement.*

5° E *désignant le point commun aux droites* (d) *et* (γ), *le cercle déterminé par le second point où* FE' *coupe le cercle* FIJ, *par* m_4, *et par le point de rebroussement* F, *touche en ce point la tangente de rebroussement.*

Par une transformation homographique qui permute les points cycliques et les points I et J où la cardioïde touche sa tangente double, cette courbe se transforme en une hypocycloïde à trois rebroussements; des théorèmes ci-dessus, on déduit alors les suivants :

1° *La conique déterminée par les rebroussements d'une hypocycloïde à trois rebroussements, et par les deux points où cette courbe est coupée par une quelconque de ses tangentes, a un quatrième point fixe, qui est le point de concours des tangentes de rebroussement.*

2° *Les trois tangentes menées à une hypocycloïde à trois rebroussements, d'un point* A *quelconque du cercle des rebroussements, ont leurs points de contact sur une droite* (γ).

3° *Cette droite* (γ) *est normale à l'hypocycloïde au quatrième point où elle rencontre cette courbe.*

4° F *désignant l'un quelconque des points de rebroussement,* FA *et la tangente à l'hypocycloïde au pied de la normale* (γ) *ont des directions symétriques par rapport à la tangente de rebroussement correspondante.*

5° *La conique tangente à une hypocycloïde en un point de rebroussement* F, *et passant par les deux autres et par un autre point quelconque* m_4 *de cette courbe, coupe le cercle des rebroussements à l'extrémité de la corde menée par* F *parallèlement à la normale en* m_4 *à l'hypocycloïde.*

Ces théorèmes s'étendraient à toute courbe de troisième classe ayant une tangente double, et l'on en déduirait, par transformation corrélative, des propriétés des cubiques à point double.

2318.

(1917, p. 199.)

Démontrer que le rayon vecteur OM, *d'un point d'une cissoïde droite ayant* O *pour point de rebroussement et la perpendiculaire à l'asymptote menée par le centre de courbure correspondant à* M *se coupent sur une parallèle à l'asymptote. En déduire une construction du centre de courbure en un point d'une cissoïde.* F. Balitrand.

Solution

Par M. M. Faucheux.

Soit OP la perpendiculaire abaissée de O sur l'asymptote Δ. Les équations paramétriques de la cissoïde sont

$$x = \frac{t^2}{1+t^2},$$

$$y = \frac{t^3}{1+t^2}.$$

Il est facile de former l'équation de la normale

$$t(t^2+3)y + 2x = t^2(t^2+2).$$

Le centre de courbure γ est à l'intersection de la normale et de la droite $y = \frac{4}{3}t$ qui est perpendiculaire à Δ et coupe

OM au point S′ d'abscisse $x = \frac{4}{3}$, c'est-à-dire sur une parallèle Δ' à Δ facile à construire.

Soient C le milieu de OP, R, S les intersections de OM avec le cercle de diamètre OP et avec Δ. Construisons les rectangles CPSF, OPSG. Les triangles GMS et PRO sont egaux; MFS est isoscèle, et si E est le symétrique de C par rapport à O, FMOE est un trapèze isoscèle; si l'on abaisse EK perpendiculaire à MF

$$MF = OE = OC = MK,$$

et la cissoïde est le lieu du milieu de KF, l'angle droit EKF se déplaçant de façon que KE passe par le point fixe E et que KF conserve une longueur constante, F se déplaçant sur la droite fixe CF. Le centre instantané I se trouve à l'intersection de FG et de la parallèle à KF menée par E, MI est la normale à la cissoïde; d'où la construction :

Mener par S la parallèle à l'axe, par E la parallèle à CR; l'intersection est le point I; γ est l'intersection de MI et de la parallèle à l'axe menée par S′.

Autres solutions par MM. R. Bouvaist, J. Lemaire, L. Maloue; J. Rose.

2320.

(1917, p. 200).

Soit M *un point d'une cubique nodale, la polaire de* M *par rapport aux tangentes au point double et la tangente en* M *à la courbe se coupent en* P, *les trois tangentes menées de* P *à la cubique ont leurs points de contact en ligne droite, et cette droite enveloppe la conique inscrite dans le triangle des tangentes d'inflexion et qui touche les tangentes au point double. Proposition corrélative.*

R. Bouvaist.

Solution

Par un *Abonné*.

On doit à M. Delens le théorème suivant (*J. M. S.* de De Longchamps, 1892, p. 195) :

La normale en un point quelconque d'une hypocycloïde *à trois rebroussements rencontre cette courbe en trois autres points pour lesquels les tangentes vont concourir sur la circonférence qui lui est circonscrite.*

En le généralisant par homographie et le transformant ensuite par dualité, on retrouve l'énoncé de la question **2320**. La proposition directe et sa corrélative sont donc démontrées

Autre solution par M. J. Lemaire.