G. FONTENÉ

Rayon de courbure de la courbe qui est le lieu des centres des sphères osculatrices à une courbe gauche

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 20 (1920), p. 214-219

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__214_1>

[O3gα]

RAYON DE COURBURE DE LA COURBE QUI EST LE LIEU DES CENTRES DES SPHÈRES OSCULATRICES A UNE COURBE GAUCHE;

PAR M. G. FONTENÉ.

I.

1. Soit (A) une courbe et (A′) la courbe qui est l'enveloppe des axes des cercles osculateurs ou le lieu des centres des sphères osculatrices. La tangente T′ en A′ à la seconde courbe est parallèle à la binormale B en A, de sorte que la tangente T en A est parallèle à la binormale B′ en A′; les normales principales N et N′ sont parallèles; on peut appliquer aux deux courbes le théorème que j'ai donné dans la Note précédente, et utiliser les figures de cette Note.

La courbe (A) ayant fourni la courbe (A′), celle-ci fournit de même une courbe (A″); les courbes (A) et (A″) ont leurs tangentes parallèles.

2. M. Bricard a indiqué pour le rayon de courbure R′ de la courbe (A′) la formule

$$R' = \left| \rho \frac{d\rho}{dR} \right|, \tag{1}$$

ρ étant le rayon de la sphère osculatrice; j'ai donné une démonstration géométrique de cette formule (N. A., question **2312**, 1917, p. 80, et 1919, p. 79). Le vecteur $C\Omega$ qui va du centre de courbure de la courbe (A) au centre Ω de la sphère osculatrice ayant pour expression

$$\overline{C\Omega} = -\frac{dR}{d\omega}$$

on a

$$\rho^2 = R^2 + \left(\frac{dR}{d\omega}\right)^2,$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\rho}{d\omega} &= R\frac{dR}{d\omega} + \frac{dR}{d\omega}\frac{d^2R}{d\omega^2} \\ &= \frac{dR}{d\omega}\left(R + \frac{d^2R}{d\omega^2}\right), \end{aligned}$$

ou

$$\rho \frac{d\rho}{dR} = R + \frac{d^2R}{d\omega^2};$$

on a donc encore

$$R' = \left| R + \frac{d^2R}{d\omega^2} \right|. \tag{2}$$

Selon que les normales principales N *et* N′ *aux deux courbes* (*A*) *et* (*A*′) *sont de sens contraires ou de même sens, on a*

$$R' = \pm \rho \frac{d\rho}{dR} = \pm \left(R + \frac{d^2R}{d\omega^2}\right);$$

si l'on donnait un signe à R', d'après le sens relatif des deux rayons de courbure, on aurait toujours

$$(3)\qquad R' = -\rho\frac{d\rho}{dR} = -\left(R + \frac{d^2R}{d\omega^2}\right).$$

Les normales principales N et N′ sont de sens contraires, si l'on a

$$(4)\qquad \rho\frac{d\rho}{dR} > 0 \qquad \text{ou} \qquad R + \frac{d^2R}{d\omega^2} > 0.$$

J'ai retrouvé la formule (2), avec la remarque précédente, en complétant un calcul de M. Egan (*N. A.*, 1918, p. 76). Les coordonnées x', y', z' du point Ω sont données par les formules

$$x = x + \lambda R - \alpha\left(T\frac{dR}{ds}\right), \qquad \ldots,$$

où l'on a mis $T\dfrac{dR}{ds}$ au lieu de $\dfrac{dR}{d\omega}$; si l'on différentie la première de ces formules par rapport à s, en tenant compte des dernières formules de Frenet

$$\frac{d\lambda}{ds} = -\frac{a}{R} - \frac{\alpha}{T},$$

on a

$$\begin{aligned}\frac{dx'}{ds} \quad \text{ou} \quad \frac{dx'}{ds'}\frac{ds'}{ds} &= a - a - \alpha\frac{R}{T}\\ &\quad + \lambda\frac{dR}{ds} - \lambda\frac{dR}{ds} - \alpha\frac{d}{ds}\left(T\frac{dR}{ds}\right)\\ &= -\alpha\left[\frac{R}{T} + \frac{d}{ds}\frac{dR}{d\omega}\right],\end{aligned}$$

en remettant $\dfrac{dR}{d\omega}$ *au lieu de* $T\dfrac{dR}{ds}$; la demi-tangente T' étant de même sens que la binormale B, on a $\dfrac{dx'}{ds'} = \alpha$, et il reste, α *disparaissant*,

$$\frac{ds'}{ds} = -\left[\frac{R}{T} + \frac{d}{ds}\frac{dR}{d\omega}\right];$$

en multipliant les deux membres de l'égalité par T, on obtient

$$\frac{ds'}{d\omega} = -\left(R + \frac{d^2R}{d\omega^2}\right);$$

selon que les normales principales N et N' sont de sens contraires ou de même sens, on a (Note précédente) $d\sigma' = \mp d\omega$, et, par suite,

$$R' = \pm\left(R + \frac{d^2R}{d\omega^2}\right).$$

3. Si la courbe (A) est une courbe à courbure constante, le centre A' de la sphère osculatrice en A n'est autre que le centre de courbure en A; les deux courbes (A) et (A') sont réciproques. La condition (4) est ici réalisée, et en effet les normales principales sont AA' et A'A; la formule (3), avec $\rho = R$, donne bien $R' = -R$.

Si, au lieu de supposer R constant, on suppose $R = A\omega + B$, la condition (4) est encore réalisée, les normales principales sont de sens contraire, on a $R' = -R$.

II.

4. Pour une courbe sphérique, les quantités x', y', z' sont des constantes. *Une courbe sphérique est caractérisée par l'équation intrinsèque*

$$R + \frac{d^2R}{d\omega^2} = 0, \tag{5}$$

ou

$$R^2 + \left(\frac{dR}{d\omega}\right)^2 = \text{const.} = \rho^2, \tag{6}$$

ou

$$\left\{\begin{array}{l} R = \rho \sin(\omega - \alpha), \\ R = a \cos\omega + b \sin\omega, \quad (\rho = \sqrt{a^2 + b^2}); \end{array}\right. \tag{7}$$

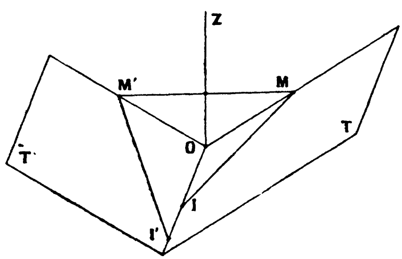
cette dernière relation constitue l'équation intrinsèque la plus simple des courbes sphériques.

Avec une origine convenable pour l'arc ω, la formule (7) peut s'écrire

$$R = \rho \sin\omega;$$

cette formule peut s'établir directement. Elle se confondra en effet avec le théorème de Meusnier *si l'on démontre que* ω, *angle de contingence totale pour la torsion, est égal à l'angle du plan osculateur à la courbe avec le plan tangent à la sphère*, ou mieux que les différentielles de ces deux angles sont égales. Cela résulte de ce que tous les points d'une sphère sont

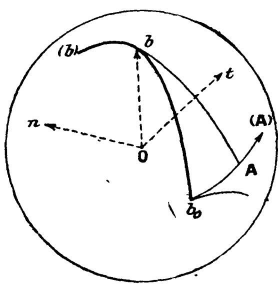
Fig. 1.



des ombilics. L'intersection des plans tangents T et T' en deux points M et M' infiniment voisins sur la courbe est perpendiculaire à MM' : soit OII' cette intersection, O étant le point situé dans le plan perpendiculaire mené par MM′, et les plans osculateurs à la courbe en M et M′ étant les plans M′MI et MM′I′; à cause de OM = OM′, le plan bissecteur zOI du diédre obtus (T, T′) est un plan de symétrie pour chacun des deux plans osculateurs; la différence entre l'angle des plans T′ et MM′I′ et celui des plans T et M′MI est donc égale à l'angle des plans MM′I′ et M′MI, c'est-à-dire qu'elle a pour valeur $d\omega$.

Le fait énoncé ci-dessus peut encore s'établir en disant : le rayon de la sphère étant supposé égal à *un*, si l'on construit l'indicatrice sphérique sur cette sphère, le rayon Ob parallèle à la binormale (axe de courbure en A) donne un point b (pôle du cercle de courbure), qui est le centre de courbure sphérique en A, c'est-à-dire le point de contact du grand cercle normal Ab avec son enveloppe (b), développée sphérique de la courbe (A); si b_0 est une origine convenablement choisie, on sait que *l'arc b_0 b de cette développée est égal au rayon de courbure sphérique* Ab, *comme dans le*

Fig. 2.



plan; l'angle de contingence totale pour la torsion est donc égal à l'angle du plan osculateur à la courbe avec le plan tangent à la sphère.