J. HAAG

Sur l'application de la loi de Gauss à la position probable d'un point dans le plan ou dans l'espace

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 20 (1920), p. 201-208

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__201_0>

[J2f]

SUR L'APPLICATION DE LA LOI DE GAUSS A LA POSITION PROBABLE D'UN POINT DANS LE PLAN OU DANS L'ESPACE ;

(*Suite et fin.*)

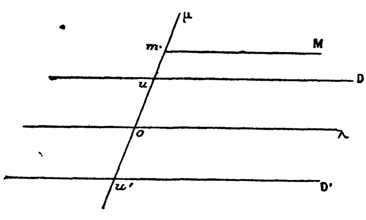
PAR M. J. HAAG.

III.

Les formules (47) et (57) sont beaucoup trop compliquées pour pouvoir être appliquées dans des problèmes posés par la pratique et leur intérêt est surtout théorique. Nous allons, au contraire, aboutir à des résultats très simples, en introduisant des coordonnées tangentielles.

20. *Détermination de l'ellipse unitaire par ses tangentes.* — Imaginons que, par un procédé quelconque, on sache calculer l'écart unitaire de la projection m sur une droite quelconque $O\mu$, parallèlement à une direction quelconque $O\lambda$. Portons cet écart

Fig. 19.



en Ou et Ou' (*fig.* 19), de part et d'autre du point O.

En menant par u et u' les parallèles D et D' à $O\lambda$, on obtient deux tangentes à l'ellipse unitaire (n° 18).

En faisant varier $O\lambda$, on aura toutes les tangentes. *L'ellipse unitaire sera ainsi définie comme une enveloppe de droites.*

Le cas où cette enveloppe *dégénère en deux points* symétriques par rapport à O correspond au cas d'un vecteur unitaire, les deux points de dégénérescence étant l'extrémité de ce vecteur et le point symétrique par O.

Ceci s'étend à l'espace, en remplaçant la projection parallèlement à une droite par la projection parallèlement à un plan. L'ellipsoïde unitaire est alors défini comme enveloppe de plans. Il peut dégénérer en une ellipse ou en deux points (réduction à deux ou un vecteur).

Application à un groupe de points expérimentaux. — Si l'on possède un groupe assez nombreux de points expérimentaux, on peut essayer de voir s'il obéit à la loi de Gauss, de la manière suivante :

On commence par déterminer le point moyen O. Puis, on projette tous les points sur une droite $O\mu$, parallèlement à une droite (ou un plan) quelconque. On prend l'écart moyen des points obtenus.

On en déduit, par la construction ci-dessus, deux droites D et D′ (ou deux plans P et P′) symétriques par rapport à O.

En faisant varier la direction de la projection, on obtient ainsi autant de droites (ou de plans) que l'on veut. Toutes ces droites (ou plans) doivent envelopper une même ellipse (ou ellipsoïde), dégénérée ou non.

Bien entendu, à ce critère peuvent s'ajouter ceux qui permettent de reconnaître que les projections sur $O\mu$ obéissent elles-mêmes à la loi de Gauss, tels que comparaison de l'écart moyen et de l'écart moyen quadratique.

Quoi qu'il en soit, si l'enveloppe sus-visée est une ellipse) ou un ellipsoïde), on pourra admettre, avec vraisemblance, la loi de Gauss.

En prenant l'homothétique de cette ellipse (ou ellipsoïde) dans le rapport $\sqrt{\pi}$, on aura l'ellipse (ou ellipsoïde) unitaire.

21. *Équation tangentielle des ellipses de probabilité.* — Si l'on prend deux axes de coordonnées quelconques, d'origine O, l'équation tangentielle de l'ellipse unitaire est de la forme

$$\varphi(u, v) = w^2, \tag{104}$$

$\varphi(u, v)$ étant une forme quadratique en u, v, réductible à une somme de deux carrés ou à un seul carré (cas de dégénérescence).

L'ellipse de probabilité (E_ω) d'indice ω, a pour équation tangentielle

$$\omega^2 \varphi(u, v) = w^2. \tag{105}$$

Cette équation donne immédiatement l'indice de l'ellipse de probabilité tangente à une droite donnée (u, v, w), ce qui est très important pour l'application de certaines formules du paragraphe II.

Connaissant l'équation (104), on peut aisément calculer la probabilité élémentaire en un point quelconque (x, y). Soit

$$\varphi(u, v) \equiv A u^2 + 2 B uv + C v^2. \tag{106}$$

En écrivant que le point (x, y) se trouve sur la conique (105) ou que le point $\left(\frac{x}{\omega}, \frac{y}{\omega}\right)$ se trouve sur la conique (104), on trouve

$$(107) \qquad \omega^2 = \frac{Cx^2 + Ay^2 - 2Bxy}{AC - B^2}.$$

D'autre part, le produit des demi-axes de l'ellipse (104) est, en appelant θ l'angle des axes de coordonnées, égal à $\sqrt{AC - B^2}.\sin\theta$. Dès lors, la formule (25) devient

$$(108) \qquad P = \frac{dA}{\pi\sqrt{AC - B^2}.\sin\theta}\, e^{-\omega^2},$$

ω^2 étant donné par (107).

22. *Composition des ellipses.* — Soient n points indépendants $M_1, M_2, \ldots, M_n$, obéissant chacun à la loi de Gauss, avec les elllipses unitaires (E_1), (E_2), ..., (E_n), définies par les équations tangentielles

$$(109) \qquad \varphi_i(u, v) = w^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Cherchons l'ellipse unitaire (E) qui convient au point M défini par

$$(110) \qquad (OM) = (OM_1) + (OM_2) + \ldots + (OM_n).$$

Si nous projetons cette égalité géométrique sur $O\mu$ parallèlement à $O\lambda$, nous avons

$$(111) \qquad \overline{Om} = \overline{Om_1} + \overline{Om_2} + \ldots + \overline{Om_n}.$$

Nous savons (n° 1) que l'écart unitaire de $\overline{Om}$ est la racine carrée de la somme des carrés des écarts unitaires de $\overline{Om_1}$, $\overline{Om_2}$, ... $\overline{Om_n}$, Il en résulte, en vertu du n° 20, que *la distance de* O *à une tangente quelconque de* (E) *est la racine carrée de la somme des carrés des distances de* O *aux tangentes parallèles de* (E_1), (E_2), ..., (E_n).

Voilà une construction fort simple, qui permet d'avoir aisément toutes les tangentes à (E). Elle va nous conduire aussi, immédiatement, à l'équation tangentielle de cette ellipse. En effet, les distances de O aux tangentes aux ellipses (109) de direction (u, v) sont proportionnelles $\sqrt{\varphi_i(u, v)}$. Il en résulte que l'équation tangentielle de (E) est

$$(112) \qquad \varphi_1(u, v) + \varphi_2(u, v) + \ldots + \varphi_n(u, v) = w^2.$$

Nous avons donc la règle fort simple suivante :

Règle. — *Pour composer plusieurs ellipses, on ajoute les premiers membres de leur équation tangentielles, les seconds membres étant* w^2.

Cette règle s'applique, sans distinction, à tous les cas, y compris les cas de dégénérescence. En particulier, si l'on a affaire aux n vecteurs considérés au n° 10, on a

$$(113) \qquad \varphi_i(u, v) = (a_i u + b_i v)^2.$$

En portant dans (112) et appliquant ensuite les formules (108) et (107), on retrouve les formules (47) et (48).

On peut aussi retrouver la construction donnée au n° 5 pour la composition d'une ellipse et d'un vecteur. L'ellipse (E') résultante de l'ellipse (E), définie par (104) et du vecteur (OU), de projections a, b, a pour équation tangentielle

$$(114) \qquad \varphi'(u, v) \equiv \varphi(u, v) + (au + bv)^2 = w^2.$$

On voit d'abord qu'elle est bitangente à (E), le pôle de la corde de contact ayant pour équation tangentielle $au + bv = 0$, c'est-à-dire étant le point à l'infini sur OU. Autrement dit, la corde de contact est le diamètre conjugué de OU.

En second lieu, si, conservant les notations du n° 5, nous posons $\lambda = \frac{OB}{OU}$, $\lambda' = \frac{OB'}{OU}$, les équations

$$(115) \qquad \varphi(u, v) = \lambda^2 (au + bv)^2,$$
$$(116) \qquad \varphi'(u, v) = \lambda'^2 (au + bv)^2$$

doivent admettre une racine double en $\frac{u}{v}$. Si l'on écrit cette condition pour (115), on obtient une équation du premier degré en λ^2, comme cela est, du reste, évident *a priori*. Mais, grâce à (114), l'équation (116) coïncide avec (115), si l'on prend

$$(117) \qquad \lambda'^2 = \lambda^2 + 1$$

Si λ^2 donne une racine double à (115), λ'^2 donnera une racine double à (116). Comme, pour chaque équation, il n'y a qu'une valeur de λ'^2 (ou λ^2) satisfaisant à cette condition, on a nécessairement la relation (117) entre les rapports $\frac{OB}{OU}$ et $\frac{OB'}{OU}$, ce qui équivaut à

$$\overline{OB'}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OU}^2.$$

Ainsi sont démontrées les deux règles qui caractérisent la construction donnée au n° 5.

On pourrait, tout aussi facilement, démontrer la règle donnée pour la composition de deux ellipses.

23. *Cas des ellipsoïdes.* — Tout ce qui précède s'étend, sans difficulté, à l'espace à trois (et même à n) dimensions.

L'équation (104) est alors remplacée par

$$\varphi(u, v, w) = r^2, \tag{118}$$

$\varphi(u, v, w)$ désignant une forme quadratique, somme de trois carrés, deux carrés ou un carré, suivant que l'éllipsoïde ne dégénère pas, dégénère en un ellipsoïde ou dégénère en deux points.

L'indice ω continue à être donné par une équation analogue à (105). Les formules (107) et (108) pourraient être étendues, mais de façon moins simple.

Quant aux règles données au n° **22** pour la composition des ellipses, elles s'appliquent, sans aucune modification, à la composition des ellipsoïdes, dégénérés ou non. On peut, si l'on veut, en déduire les constructions du n° **7**. On pourrait aussi, mais avec beaucoup plus de peine, retrouver les formules (57) et (58).

24. *Conclusion.* — La conclusion qui se dégage du § III est que, dans les questions de probabilité de situation d'un point dans le plan ou dans l'espace, les coordonnées tangentielles sont d'un emploi beaucoup plus commode que les coordonnées ponctuelles. Elles permettent, par une extension très simple de la combinaison quadratique des écarts, de composer facilement les probabilités indépendantes. Elles s'appliquent aisément à l'étude des groupes de points expérimentaux et, en particulier, en Artillerie, à la dispersion du tir fusant (1).

(1) C'est ainsi que j'ai pu déduire du dépouillement d'un certain nombre de tirs aériens la loi de probabilité du tir de l'obus à balles de 75 dans tout son plan de tir.

TABLE DE LA FONCTION $\theta_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\varphi} e^{-\frac{k^2}{\cos^2\varphi}} d\varphi$ (EN CENTIÈMES).

φ.	k. 0.	0,2.	0,4.	0,6.	0,8.	1.	1,2.	1,4.	1,6.
10°.......	3	3	2	2	1	1	1	0	0
20.......	6	5	5	4	3	2	1	1	0
30.......	8	8	7	6	4	3	2	1	1
40.......	11	11	9	7	5	3	2	1	1
50.......	14	13	11	9	6	4	2	1	1
60.......	17	16	13	10	6	4	2	1	1
70.......	19	18	14	10	6	4	2	1	1
80.......	22	19	14	10	7	4	2	1	1
90.......	25	19	14	10	7	4	2	1	1

Pour $k > 1{,}6$, $\theta_1 < 0{,}01$.

TABLE DE LA FONCTION $\theta_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\varphi} e^{-\frac{k^2}{\sin^2\varphi}} d\varphi$ (EN CENTIÈMES).

φ.	k. 0.	0,2.	0,4.	0,6.	0,8.	1.	1,2.	1,4.	1,6.
10°.......	3	0							
20.......	6	2	0						
30.......	8	4	2	0					
40.......	11	6	3	1	0				
50.......	14	9	5	3	1	1	0		
60.......	17	12	7	4	2	1	1	0	
70.......	19	14	10	6	4	2	1	0	
80.......	22	17	12	8	5	3	2	1	0
90.......	25	19	14	10	6	4	2	1	1

Pour $k > 1{,}6$, $\theta_2 < 0{,}01$.

Nota. — Cette Table et la précédente sont extraites de Tables plus complètes, annexées à la Note citée plus haut de la Commission de Gâvre.