Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 20 (1920), p. 188-189

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__188_1>

CORRESPONDANCE.

M. **Fontené.** — Mannheim a montré (*Comptes rendus*, 1897, 2e volume, p. 849) que, si les mêmes droites sont à la fois les normales principales d'une courbe gauche (A) et les binormales d'une autre courbe gauche (B), on a pour la courbe (A)

$$\frac{1}{R^2} + \frac{1}{T^2} = \frac{1}{AR};$$

si MC est le rayon de courbure en M, si MC′ est le rayon de torsion porté sur la binormale, en traçant CC′ et en menant MH perpendiculaire à CC′, la projection de MH sur MC a une longueur constante A.

Il y aurait lieu de donner également l'equation intrinsèque vérifiée par les courbes (B).

Note. — Il est aisé de répondre à la question posée par M. Fontené, en employant le calcul vectoriel.

Soit MBTN le trièdre principal d'une courbe C, en un point M; soit P un point de la binormale MB, decrivant une courbe dont cette binormale est la normale principale. La longueur MP est évidemment une constante a.

En employant les notations de MM. Burali-Forti et Marcolongo ([1]), on doit avoir

$$\frac{dP}{ds} \times \frac{d^2P}{ds^2} \wedge \mathbf{b} = 0.$$

([1]) *Elements de calcul vectoriel*, traduction Lattès, p. 86.

Or on a

$$P = M + a\mathbf{b},$$

d'où en dérivant et en appliquant les formules de Frenet,

$$\frac{dP}{ds} = \frac{dM}{ds} + a\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \mathbf{t} + a\frac{\mathbf{n}}{T},$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2P}{ds^2} &= \frac{d\mathbf{t}}{ds} + \frac{a}{T}\frac{d\mathbf{n}}{ds} - \frac{aT'}{T^2}\mathbf{n} \\ &= \frac{\mathbf{n}}{R} - \frac{a}{T}\left(\frac{1}{R}\mathbf{t} + \frac{1}{T}\mathbf{b}\right) - \frac{aT'}{T^2}\mathbf{n} \\ &= \frac{-a}{RT}\mathbf{t} + \left(\frac{1}{R} - \frac{aT'}{T^2}\right)\mathbf{n} - \frac{a}{T^2}\mathbf{b}.\end{aligned}$$

On a ensuite

$$\frac{d^2P}{ds^2} \wedge \mathbf{b} = \frac{a}{RT}\mathbf{n} + \left(\frac{1}{R} - \frac{aT'}{T^2}\right)\mathbf{t},$$

$$\frac{dP}{ds} \times \frac{d^2P}{ds^2} \wedge \mathbf{b} = \frac{1}{R} - \frac{aT'}{T^2} + \frac{a^2}{RT^2}.$$

La relation cherchée entre les éléments de la courbe C est donc

$$\frac{1}{R} - \frac{aT'}{T^2} + \frac{a^2}{RT^2} = 0.$$

Il va sans dire que la relation de Mannheim s'obtient aussi facilement par l'emploi de la méthode vectorielle.

R. B.