NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

R. HARMEGNIES

# Sur une propriété caractéristique des cylindres et du cylindroïde

*Nouvelles annales de mathématiques 4e série*, tome 20 (1920), p. 178-180

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__178_1>

[M²3aα]

# SUR UNE PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE DES CYLINDRES ET DU CYLINDROÏDE;

PAR M. R. HARMEGNIES.

On sait que les cylindres et le cylindroïde (ou conoïde de Plücker) sont tels que le lieu des projections d'un point quelconque de l'espace sur leurs génératrices est une courbe plane. Je me propose d'établir *géométriquement* que ce sont les seules surfaces réglées jouissant de cette propriété. Ce théorème a été établi analytiquement par M. Appell ([1]).

Considérons en effet deux génératrices quelconques $G_1$ et $G_2$ d'une telle surface et leur perpendiculaire commune $P_1P_2$. Projetons un point P quelconque de $P_1P_2$ en $P_3P_4$, sur deux autres génératrices $G_3, G_4$ également quelconques. Dans le cas du cylindroïde, $P_3P_4$ et $P_1P_2$ sont confondues avec l'axe de la surface ; éliminons ce cas, et supposons que $P_1P_2$, $P_3P_4$ déterminent un plan. Dans le cas du cylindre, ce plan est indépendant du point P choisi sur $P_1P_2$ ; éliminons encore ce cas, et supposons que ce plan tourne autour de $P_1P_2$ quand P décrit cette droite. Soit Q le point de rencontre de $P_1P_2$ et $P_3P_4$ ; on voit facilement que P et Q se correspondent homographiquement sur $P_1P_2$. Un point double M de cette homographie sera tel que la droite $MP_3P_4$ correspondante soit perpendiculaire commune à $G_3$ et $G_4$. Si l'homographie a deux points doubles distincts, M et M', la perpendiculaire commune à $G_3$ et $G_4$, passant par M et M', ne peut être que MM' ou $P_1P_2$ : on retrouve le cas du conoïde, à moins que $G_3$ et $G_4$ n'admettent plusieurs perpendiculaires communes ; elles sont alors parallèles et l'on retrouve le cas des cylindres.

Si les deux points doubles sont confondus (étant bien entendu qu'il en est ainsi quelles que soient les génératrices choisies), on voit que les perpendiculaires communes à deux génératrices quelconques se rencontrent. Supposons que $G_4$ se confonde avec $G_1$ ; les

---

([1]) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXVIII, p. 261.

perpendiculaires communes à $G_1$, $G_2$, $G_3$ prises deux à deux forment un triangle $P_1P_2P_3$, et chaque génératrice étant perpendiculaire au plan de ce triangle, on retrouve encore le cas des cylindres. *Une surface jouissant de la propriété indiquée ne peut donc être qu'un cylindre ou un conoïde droit.*

Dans ce dernier cas, si l'on projette sur un plan perpendiculaire à l'axe du conoïde, on voit que la projection de la courbe plane, lieu des projections d'un point A sur les génératrices, est le cercle qui admet pour extrémités d'un même diamètre la projection de l'axe et la projection de A. Cette courbe est donc une conique, et le conoïde admet comme courbes directrices: 1° une génératrice d'un cylindre de révolution; 2° la droite à l'infini du plan perpendiculaire; 3° une section plane du cylindre. C'est bien la définition du cylindroïde.