

J. HAAG

**Sur l'application de la loi de Gauss à  
la position probable d'un point dans  
le plan ou dans l'espace**

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 20  
(1920), p. 161-178

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1920\\_4\\_20\\_\\_161\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__161_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1920, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

[J2f]

**SUR L'APPLICATION DE LA LOI DE GAUSS A LA POSITION PROBABLE D'UN POINT DANS LE PLAN OU DANS L'ESPACE (suite);**

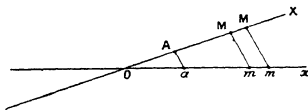
Par M. J. HAAG.

## II.

**12. Invariance de la loi de Gauss dans la projection cylindrique.** — Soit d'abord une droite  $OX$ , sur laquelle le point  $M$  obéit à la loi de Gauss, avec le vecteur unitaire  $OA$ . Projetons  $M$  en  $m$  sur la droite  $Ox$ , parallèlement à une direction fixe quelconque.

Soit  $Oa$  la projection de  $OA$ . La probabilité pour

Fig. 5.



que  $m$  soit sur le segment élémentaire  $mm'$  est évidemment la même que la probabilité pour que  $M$  soit sur le segment homologue  $MM'$ . Or, cette dernière est  $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{MM'}{OA} e^{-\left(\frac{OM}{OA}\right)^2}$ . Comme

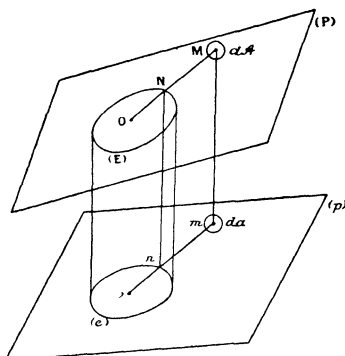
$$\frac{MM'}{OA} = \frac{mm'}{Oa} \quad \text{et} \quad \frac{OM}{OA} = \frac{Om}{Oa},$$

elle peut aussi s'écrire  $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{mm'}{Oa} e^{-\left(\frac{Om}{Oa}\right)^2}$ .

D'où il résulte que  $m$  obéit, sur  $Ox$ , à la loi de Gauss, avec  $Oa$  pour écart unitaire.

Soit maintenant un plan P, dans lequel le point M obéit à la loi de Gauss, avec l'ellipse unitaire (E). Pro-

Fig. 6.



jetons sur le plan (p) parallèlement à une direction fixe quelconque. La probabilité P pour que m soit dans l'aire élémentaire  $da$  est évidemment la même que la probabilité pour que M soit dans l'aire homologue  $d\alpha$ .

Or, cette dernière est  $\frac{d\alpha_0}{S} e^{-\left(\frac{OM}{ON}\right)^2}$ , S désignant l'aire de l'ellipse (E). Mais, si s désigne l'aire de l'ellipse (e), projection de (E), on a

$$\frac{d\alpha_0}{S} = \frac{da}{s}, \quad \frac{OM}{ON} = \frac{Om}{On}.$$

Donc, la probabilité P peut s'écrire  $\frac{da}{s} e^{-\left(\frac{Om}{On}\right)^2}$ .

Autrement dit, le point m obéit, dans le plan (p), à la loi de Gauss, avec (e) pour ellipse unitaire.

On peut étendre, sans difficulté, les deux démonstrations précédentes à l'espace et même à un espace à un nombre quelconque de dimensions. La projection cylindrique devient alors une transformation affine,

c'est-à-dire une transformation homographique conservant le plan de l'infini.

13. *Ellipses de probabilité.* — Revenons à la formule (25). Elle nous montre que, pour une valeur donnée de  $d\mathfrak{A}$ , les points d'égale probabilité se répartissent sur les ellipses  $(E_\omega)$  homothétiques de l'ellipse unitaire  $(E)$ . Ces ellipses sont appelées *ellipses de probabilité*.

La probabilité est plus grande en n'importe quel point intérieur à  $(E_\omega)$  qu'en n'importe quel point extérieur à  $(E_\omega)$ , car  $e^{-\omega^2}$  décroît quand  $\omega$  croît. Il s'ensuit que *la probabilité  $P_\omega$  pour que le point M soit à l'intérieur de l'ellipse  $(E_\omega)$  est plus grande que la probabilité pour qu'il soit dans une aire quelconque égale à l'aire de cette ellipse.*

Calculons  $P_\omega$ . On a

$$dP_\omega = \frac{1}{S} e^{-\omega^2} d\mathfrak{A},$$

en désignant par  $d\mathfrak{A}$  l'aire comprise entre les ellipses  $(E_\omega)$  et  $(E_{\omega+d\omega})$ . Or, l'aire de  $(E_\omega)$  est  $S\omega^2$ . Par suite,  $d\mathfrak{A} = 2S\omega d\omega$ . D'où

$$(69) \quad \begin{aligned} dP_\omega &= e^{-\omega^2} d(\omega^2), \\ P_\omega &= \int_0^\omega e^{-\omega^2} d(\omega^2) = 1 - e^{-\omega^2}. \end{aligned}$$

*L'ellipse probable* ou mieux *ellipse médiane* est celle à l'intérieur de laquelle il y a une chance sur deux pour que se trouve le point M. Elle est donnée par l'équation

$$1 - e^{-\omega^2} = \frac{1}{2},$$

dont l'unique solution est  $\omega_p = 0,8326\dots$ . *Ce n'est pas l'ellipse décrite sur les écarts médians comme*

*diamètres conjugués.* D'après (6), elle lui est homothétique dans le rapport  $\frac{\omega_h}{t_p} = \frac{0,8326\dots}{0,4769\dots} = 1,746$ , soit environ  $\frac{7}{4}$ .

14. *Cas où l'ellipse unitaire est un cercle.* — Soit  $a$  le rayon de ce cercle. La probabilité élémentaire s'écrit

$$(70) \quad \cdot P = \frac{1}{\pi a^2} e^{-\omega^2} d\mathcal{A} = \frac{1}{\pi} e^{-\omega^2} \omega d\omega d\varphi,$$

en appelant  $\varphi$  l'angle polaire du point M et posant toujours  $\omega = \frac{OM}{a}$ .

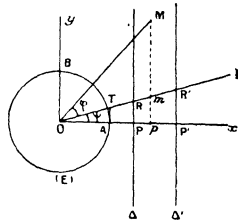
*Si une aire  $\mathcal{A}$  tourne autour de O, la probabilité à l'intérieur de cette aire demeure constante.*

*Probabilité dans une bande rectiligne indéfinie.*

— Soit la bande comprise entre les droites parallèles  $\Delta$  et  $\Delta'$  (*fig. 7*).

Prenons les deux axes  $Ox$  et  $Oy$  respectivement

Fig. 7.



perpendiculaire et parallèle à  $\Delta$ . Pour que M soit dans la bande considérée, il faut et il suffit que son abscisse soit comprise entre les abscisses  $\alpha$  et  $\alpha'$  de P et P'. Si l'on remplace le cercle (E) par les vecteurs unitaires (OA) et (OB), on voit que la probabilité pour

qu'il en soit ainsi est

$$(71) \quad P = \frac{1}{2} \left[ \theta \left( \frac{\alpha'}{\alpha} \right) - \theta \left( \frac{\alpha}{\alpha'} \right) \right] \quad (\alpha < \alpha'),$$

ou encore

$$(72) \quad P = \frac{1}{2} [\theta(\omega') \pm \theta(\omega)],$$

$\omega$  et  $\omega'$  désignant les indices des cercles de probabilité tangents à  $\Delta$  et  $\Delta'$ ; on doit prendre le signe + ou le signe —, suivant que les deux droites sont ou ne sont pas de part et d'autre du point O; de plus, dans la seconde hypothèse, on doit prendre  $\omega < \omega'$ . Dans le cas où les deux droites sont symétriques par rapport à O, on a  $P = \theta(\omega)$ .

*Probabilité de la projection sur une droite quelconque.* — Soit la droite  $O\xi$ , définie par l'angle polaire  $\psi$ . Soit  $m$  la projection de M sur cette droite, parallèlement à  $Oy$ . *Quelle est la probabilité pour que  $m$  se trouve sur le segment  $RR'$  ?*

Cette probabilité est évidemment la même que tout à l'heure. Elle est donnée par (71). Si  $\xi$  et  $\xi'$  sont les abscisses de R et R' sur  $O\xi$ , on a

$$\alpha = \xi \cos \psi, \quad \alpha' = \xi' \cos \psi;$$

d'où

$$(73) \quad P = \frac{1}{2} \left[ \theta \left( \frac{\xi'}{u} \right) - \theta \left( \frac{\xi}{u} \right) \right]$$

en posant

$$(74) \quad u = \frac{a}{\cos \psi} = OT.$$

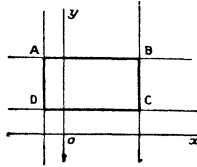
*Le point  $m$  obéit donc, sur  $O\xi$ , à la loi de Gauss, l'écart unitaire étant donnée par (74). Ceci résulte d'ailleurs aussi du n° 12, si l'on considère  $m$  comme la projection de  $p$  sur  $O\xi$ .*

*Probabilité dans un rectangle.* — Soit le rectangle ABCD (fig. 8) dont les côtés ont pour équations :

$$x = \alpha, \quad x = \alpha', \quad y = \beta, \quad y = \beta'.$$

Pour que le point M soit dans le rectangle, il faut et il suffit qu'il se trouve à la fois dans les deux bandes

Fig. 8.



formées par ses deux côtés indéfiniment prolongés. Or, les probabilités correspondant à chacune de ces deux conditions étant indépendantes, la probabilité cherchée est égale à leur produit, soit

$$(75) \quad P = \frac{1}{4} \left[ \theta \left( \frac{\alpha'}{\alpha} \right) - \theta \left( \frac{\alpha}{\alpha} \right) \right] \left[ \theta \left( \frac{\beta'}{\beta} \right) - \theta \left( \frac{\beta}{\beta} \right) \right]$$

ou

$$(76) \quad P = \frac{1}{4} [\theta(\omega') \pm \theta(\omega)] [\theta(\omega'_1) \pm \theta(\omega_1)],$$

$\omega, \omega', \omega_1, \omega'_1$  désignant les indices des cercles de probabilité tangents aux côtés du rectangle.

*Probabilité dans un secteur circulaire, dans un angle, de sommet O.* — Soit un secteur circulaire de rayon  $\omega a$  et d'angle au centre  $\varphi$ . La probabilité dans ce secteur est évidemment proportionnelle à  $\varphi$ ; elle est donc égale à

$$(77) \quad P = \frac{\varphi}{2\pi} P_\omega = \frac{\varphi}{2\pi} (1 - e^{-\omega^2}).$$

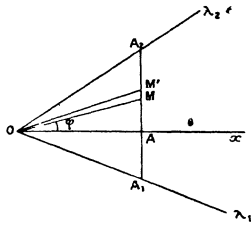
Si  $\omega$  augmente indéfiniment; on a la probabilité dans

un angle de sommet O :

$$(78) \quad P = \frac{\varphi}{2\pi}.$$

15. *Probabilité dans un triangle de sommet O, dans un olygone quelconque.* — Soit le triangle

Fig. 9.



$OA_1 A_2$  (fig. 9), défini par

$$OA = \alpha, \quad (\widehat{Ox, OA_1}) = \varphi_1, \quad (\widehat{Ox, OA_2}) = \varphi_2.$$

La probabilité, dans le triangle élémentaire  $OMM'$ , d'angle au sommet  $d\varphi$ , est (n° 14)

$$dP = \frac{d\varphi}{2\pi} \left( 1 - e^{-\frac{OM^2}{a^2}} \right).$$

Or, on a

$$OM = \frac{\alpha}{\cos \varphi};$$

d'où

$$dP = \left( 1 - e^{-\frac{k^2}{\cos^2 \varphi}} \right) \frac{d\varphi}{2\pi}$$

en posant

$$(79) \quad K = \frac{\alpha}{a} = \text{indice du cercle tangent à } A_1 A_2.$$

La probabilité cherchée est donc

$$(80) \quad \begin{aligned} P &= \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left( 1 - e^{-\frac{K^2}{\cos^2 \varphi}} \right) d\varphi \\ &= \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_1^{\varphi_2} e^{-\frac{K^2}{\cos^2 \varphi}} d\omega. \end{aligned}$$



Posons

$$(81) \quad \theta_1(k, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\varphi} e^{-\frac{k^2}{\cos^2 \varphi}} d\varphi.$$

La formule (80) devient

$$(82) \quad P = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2\pi} - [\theta_1(k, \varphi_2) - \theta_1(k, \varphi_1)].$$

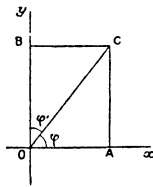
On voit que, si l'on possède une table à double entrée de la fonction  $\theta_1(k, \varphi)$ , on pourra calculer la probabilité dans tout triangle de sommet  $O$  et, par suite, dans toute aire limitée par des droites, puisqu'une telle aire peut toujours être considérée comme une somme algébrique de triangles admettant  $O$  pour sommet.

16. Signalons quelques propriétés de la fonction  $\theta_1(k, \varphi)$ .

D'abord, c'est une fonction paire de  $k$  et impaire de  $\varphi$ .

Considérons maintenant le rectangle  $OACB$  (fig. 10)

Fig. 10.



comme somme des deux triangles  $OAC$  et  $OBC$ . On a [formule (75)]

$$(83) \quad P_{OACB} = \frac{1}{4} \theta(k) \theta(k'),$$

avec

$$k = \frac{OA}{a}, \quad k' = \frac{OB}{a} = k \tan \varphi.$$

D'autre part, d'après (82),

$$P_{OAC} = \frac{\varphi}{2\pi} - \Theta_1(k, \varphi), \quad P_{OBC} = \frac{\varphi'}{2\pi} - \Theta_1(k', \varphi').$$

En ajoutant ces deux probabilités, on doit obtenir (83).

On a donc, en observant que  $\varphi + \varphi' = \frac{\pi}{2}$ ,

$$\frac{1}{4} \Theta(k) \Theta(k') = \frac{1}{4} - \Theta_1(k, \varphi) - \Theta_1(k', \varphi')$$

ou

$$(84) \quad \Theta_1(k, \varphi) + \Theta_1\left(k \operatorname{tang} \varphi, \frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{1}{4} [1 - \Theta(k) \Theta(k \operatorname{tang} \varphi)].$$

Grâce à cette identité, il suffit de calculer les valeurs de la fonction  $\Theta_1$  pour  $0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$  et pour toutes les valeurs de  $k$ ; en se servant de la table de la fonction  $\Theta$ , on en déduira les valeurs de  $\Theta_1$  pour  $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ .

Dans (84), faisons  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ; il vient

$$(85) \quad \Theta_1\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4} [1 - \Theta(k)].$$

Faisons, de même,  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ; il vient

$$(86) \quad \Theta_1\left(k, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{8} [1 - \Theta^2(k)].$$

Appliquons à l'intégrale (81) la formule de la moyenne :

$$\Theta_1(k, \varphi) = \frac{\varphi}{2\pi} e^{-\frac{k^2}{\cos^2 \varphi_0}},$$

$\varphi_0$  étant un certain angle compris entre 0 et  $\varphi$ . On a évidemment l'inégalité

$$(87) \quad \Theta_1(k, \varphi) < \frac{\varphi}{2\pi} e^{-k^2}.$$

qui montre que la fonction  $\Theta_1$  tend rapidement vers zéro, quand  $k$  augmente.

Il est commode d'introduire, en même temps que la fonction  $\Theta_1(k, \varphi)$ , la suivante :

$$(88) \quad \Theta_2(k, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\varphi e^{-\frac{k^2}{\sin^2 \varphi}} d\varphi;$$

elle est liée à la première par la relation

$$(89) \quad \Theta_2(k, \varphi) \equiv \Theta_1\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - \Theta_1\left(k, \frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

ou

$$(90) \quad \Theta_1(k, \varphi) \equiv \Theta_2\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - \Theta_2\left(k, \frac{\pi}{2} - \varphi\right).$$

L'identité (84) devient, en tenant compte de (90) et de (85) et remarquant que  $\Theta_2\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \Theta_1\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$ ,

$$(91) \quad \begin{aligned} &\Theta_2\left(k, \frac{\pi}{2} - \varphi\right) + \Theta_2(k \operatorname{tang} \varphi, \varphi) \\ &\equiv \frac{1}{4} [1 - \Theta(k)][1 - \Theta(k \operatorname{tang} \varphi)]. \end{aligned}$$

En y faisant  $\varphi = 0$ , on retrouve (85). En y faisant  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ , on obtient

$$(92) \quad \Theta_2\left(k, \frac{\pi}{4}\right) \equiv \frac{1}{8} [1 - \Theta(k)]^2 \equiv 2 \left[ \Theta_2\left(k, \frac{\pi}{2}\right) \right]^2.$$

Si l'on applique la formule de la moyenne à l'intégrale (88), on a

$$(93) \quad \Theta_2(k, \varphi) = \frac{\varphi}{2\pi} e^{-\frac{k^2}{\sin^2 \varphi_0}},$$

ce qui entraîne l'inégalité

$$(94) \quad \Theta_2(k, \varphi) < \frac{\varphi}{2\pi} e^{-\frac{k^2}{\sin^2 \varphi}},$$

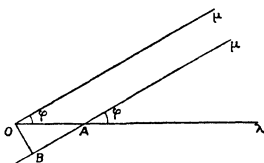
laquelle montre que la fonction  $\Theta_2$  tend rapidement vers zéro quand  $k$  augmente ou quand  $\varphi$  diminue.

Ces diverses considérations facilitent le calcul des tables des fonctions  $\Theta_1$  et  $\Theta_2$ , qui sont reproduites à la fin de cet article.

17. *Probabilité dans un angle.* — Tout angle peut être considéré comme la somme ou la différence de deux angles dont un côté passe par O. Bornons-nous, en conséquence, à considérer le cas d'un angle jouissant de cette particularité.

PREMIER CAS. — O se trouve sur le prolongement d'un côté de l'angle. — Soit l'angle  $\lambda A\mu = \varphi$ .

Fig. 11.



Menons  $O\mu$  parallèle à  $A\mu$ . La probabilité cherchée P est égale à  $P_{\lambda O\mu} - P_{\mu O A} = \frac{\varphi}{2\pi} - P_{\mu O A}$ .

Or  $\mu O A$  est un triangle. En lui appliquant la formule (82), pour  $\varphi_1 = \frac{\pi}{2} - \varphi$  et  $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ , on a

$$P_{\mu O A} = \frac{\varphi}{2\pi} - \left[ \Theta_1 \left( k, \frac{\pi}{2} \right) - \Theta_1 \left( k, \frac{\pi}{2} - \varphi \right) \right] = \frac{\varphi}{2\pi} - \Theta_2(k, \varphi),$$

avec

$$(95) \quad k = \frac{OB}{a} = \frac{OA \sin \varphi}{a} = \frac{\alpha \sin \varphi}{a}$$

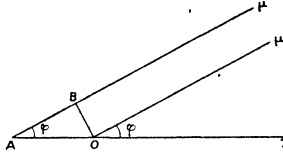
= indice du cercle tangent à  $A\mu$  (on a posé  $OA = \alpha$ ).

Finalement, on a

$$(96) \quad P = \theta_2(k, \varphi).$$

DEUXIÈME CAS. — O se trouve sur un côté de

Fig. 12.



l'angle (fig. 12). — On a, cette fois,

$$P = \frac{\varphi}{2\pi} + P_{\mu OA}.$$

Or,  $P_{\mu OA}$  est obtenu en faisant, dans (82),

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_1 = -\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \varphi - \frac{\pi}{2}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} P &= \frac{\varphi}{2\pi} + \frac{1}{2} - \frac{\varphi}{2\pi} - \left[ \theta_1\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - \theta_1\left(k, \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} - \theta_1\left(k, \frac{\pi}{2}\right) + \theta_1\left(k, \frac{\pi}{2} - \varphi\right) \\ &= \frac{1}{2} - 2\theta_1\left(k, \frac{\pi}{2}\right) + \theta_2(k, \varphi), \end{aligned}$$

ou

$$(97) \quad P = \theta_2(k, \varphi) + \frac{1}{2} \theta(k),$$

$k$  étant toujours donné par (95).

Cas où le sommet de l'angle est très éloigné du point O. — On sait que

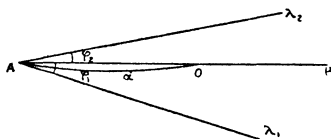
$$(98) \quad \theta_2(k, \varphi) < \frac{\varphi}{2\pi} e^{\frac{\lambda^2}{\sin^2 \varphi}} = \frac{\varphi}{2\pi} e^{-\frac{\alpha^2}{a^2}}.$$

Si la distance  $OA$  est très grande par rapport à l'écart unitaire,  $\frac{\alpha}{a}$  est très grand et  $\Theta_2(k, \varphi)$  peut être regardé comme pratiquement nul. Donc, dans cette hypothèse, *la probabilité est nulle si  $O$  est extérieur à l'angle; si  $O$  est sur un côté de l'angle, elle est donnée par la formule*

$$(99) \quad P = \frac{1}{2} \theta \left( \frac{\alpha \sin \varphi}{a} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{OB}{a} \right).$$

Dans le cas général de la figure 13, on a, en appe-

Fig. 13.



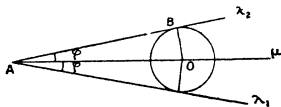
lant  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  les angles polaires, par rapport à  $AO\mu$ , des demi-droites  $A\lambda_1$  et  $A\lambda_2$ ,

$$(100) \quad P = \frac{1}{2} \left[ \theta \left( \frac{\alpha \sin \varphi_2}{a} \right) - \theta \left( \frac{\alpha \sin \varphi_1}{a} \right) \right].$$

En particulier, si  $\varphi_2 = -\varphi_1 = \varphi > 0$  (fig. 14), on a

$$(101) \quad P = \theta \left( \frac{\alpha \sin \varphi}{a} \right) = \theta \left( \frac{OB}{a} \right).$$

Fig. 14.



En particulier,  $P = \frac{1}{2}$ , si  $OB = 0$ ,  $4769 \times a$ . Donc, *l'angle médian ou écart angulaire probable est*

*l'angle circonscrit au cercle de centre O et de rayon égal au vecteur écart probable.*

**18. Cas général ou l'ellipse unitaire n'est pas un cercle.** — Il se ramène immédiatement, au cas particulier envisagé précédemment, par l'application des propriétés d'invariance du n° 12.

Supposons, en effet, que M obéisse, dans le plan (P), à la loi de Gauss, avec l'ellipse unitaire (E). Cette ellipse peut être considérée comme projection orthogonale d'un cercle (E'), situé dans un certain plan (P'), où le point M a pour homologue M'. Nous savons que M' obéit, dans (P'), à la loi de Gauss, l'ellipse unitaire étant précisément le cercle (E').

Dès lors, pour avoir la probabilité de M dans une aire (A) de (P), il suffit de calculer la probabilité de M' dans l'aire homologue (A') de (P') et l'on est bien ramené au cas où l'ellipse unitaire est un cercle.

Voyons ce que deviennent, dans le cas général, les résultats obtenus aux numéros 14 à 17.

Nous appellerons *anomalie d'un angle*  $\widehat{(\text{O}\lambda, \text{O}\mu)}$  du plan (P) la mesure algébrique  $\varphi = \widehat{(\text{O}'\lambda', \text{O}'\mu')}$  de l'angle homologue du plan (P'). On sait que c'est la différence des angles d'anomalie excentrique des points, de l'ellipse (E) situés sur les demi-droites Oμ, Oλ.

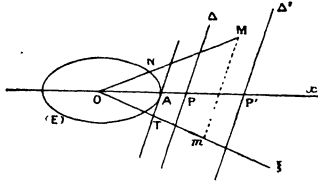
Cela posé, la formule (70) subsiste, à condition d'appeler φ l'anomalie de l'angle  $\widehat{(\text{O}x, \text{O}M)}$  et ω le rapport  $\frac{\text{OM}}{\text{ON}}$ .

Il en est de même de la formule (72), ω et ω' désignant les indices des ellipses de probabilité tangentes à Δ et Δ', soient  $\omega = \frac{\text{OP}}{\text{OA}}$ ,  $\omega' = \frac{\text{OP}'}{\text{OA}'}$  (fig. 15).

La projection  $m$  sur  $O\xi$  obéit toujours à la loi de Gauss, avec l'écart unitaire  $OT$ , comme il résulte d'ailleurs aussi du n° 12.

La formule (76) donne la *probabilité, dans un*

Fig. 15.



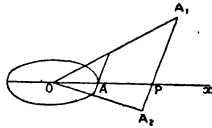
*parallélogramme dont les côtés ont des directions conjuguées par rapport à (E).*

Les formules (77) et (78) donnent les probabilités dans un secteur elliptique et dans un angle de sommet  $O$ , en fonction de l'anomalie  $\varphi$ . On en déduit des propriétés d'invariance évidentes, déjà signalées par le capitaine Vallier, dans l'article précité.

[Toutes les propriétés d'invariance signalées par cet auteur sont, du reste, évidentes par projection du cercle (E').]

La probabilité dans un triangle  $OA_1A_2$  de sommet  $O$  (fig. 16) est toujours donnée par la for-

Fig. 16.



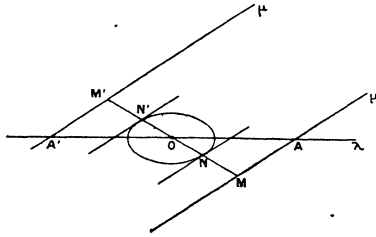
mule (82). La lettre  $k$  désigne l'indice de l'ellipse de probabilité tangente à  $A_1A_2$ , soit  $k = \frac{OP}{OA}$ . Quant



à  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ , ce sont les anomalies des angles  $(\widehat{Ox, OA_1})$ ,  $(\widehat{Ox, OA_2})$ .

La probabilité dans l'angle  $\lambda A \mu$  (fig. 17) est

Fig. 17.



donnée par (96),  $k$  désignant l'indice de l'ellipse de probabilité tangente à  $A \mu$ , soit  $k = \frac{OM}{ON}$ , et  $\varphi$  désignant l'anomalie de cet angle.

La probabilité dans l'angle  $\lambda A' \mu$  est, de même, donnée par (97). Si  $A'$  est très éloigné de  $O$ , on a

$$(102) \quad P = \frac{1}{2} \theta \left( \frac{OM'}{ON'} \right).$$

*L'écart angulaire probable est, dans cette hypothèse, l'angle circonscrit à l'ellipse décrite sur les écarts probables comme diamètres conjugués.*

**19. Ellipsoïdes de probabilité.** — D'après la formule (32), les points d'égale probabilité, pour une valeur donnée de  $dV$ , se répartissent sur les ellipsoïdes  $(E_\omega)$  homothétiques de l'ellipsoïde unitaire  $(E)$ . Ces ellipsoïdes sont appelés *ellipsoïdes de probabilité*.

Comme au n° 13, on peut démontrer que *la probabilité est plus grande dans  $(E_\omega)$  que dans n'importe quel volume équivalent.*

On a

$$dP_{\omega} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}W} e^{-\omega^2} d(W\omega^3) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-\omega^2} \omega^2 d\omega;$$

d'où

$$P_{\omega} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\omega} e^{-\omega^2} \omega^2 d\omega = \Theta(\omega) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \omega e^{-\omega^2}.$$

L'ellipsoïde probable ou médian est donné par l'équation

$$\Theta(\omega) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \omega e^{-\omega^2} = \frac{1}{2},$$

dont l'unique racine est approximativement égale à 1,076.

Il est homothétique à l'ellipsoïde décrit sur les écarts médians comme diamètres conjugués, dans le rapport  $\frac{1,076}{0,4769} = 2,25\dots$ , soit environ  $\frac{9}{4}$ .

On pourrait essayer d'étendre à l'espace les considérations développées aux nos 14 à 18.

Contentons-nous de citer les propriétés suivantes :

La probabilité dans la *bande comprise entre deux plans parallèles* est donnée par la formule (72),  $\omega$  et  $\omega'$  désignant les indices des ellipsoïdes de probabilité tangents aux deux plans.

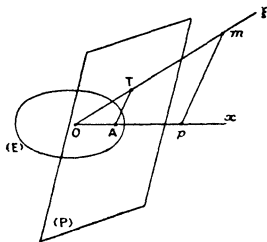
La probabilité dans un *prisme indéfini dont les faces sont parallèles à deux plans diamétraux conjugués* est, de même, donnée par (76).

La probabilité dans un *parallélépipède dont les faces sont parallèles à trois plans diamétraux conjugués* est donnée par une formule analogue, comprenant un facteur de plus et le coefficient  $\frac{1}{8}$  au lieu de  $\frac{1}{4}$ .

La projection  $m$  de  $M$  sur  $O\xi$  parallèlement à un plan  $(P)$  quelconque obéit à la loi de Gauss, avec le

vecteur unitaire  $OT$ ,  $T$  désignant l'intersection de  $O\xi$  avec le plan  $(P)$  (*fig. 18*) supposé tangent à  $(E)$ . Cela

Fig. 18.



résulte du n° 12, appliqué à  $m$  et à la projection  $p$  de  $M$  sur le diamètre  $Ox$ , conjugué de  $(P)$ .

La projection  $m$  de  $M$  sur un plan  $(P)$  parallèlement à une droite quelconque  $O\lambda$  obéit à la loi de Gauss, avec une ellipse unitaire qui est l'intersection de  $(P)$  avec le cylindre circonscrit à  $(E)$  parallèlement à  $O\lambda$ . Cela résulte du n° 12, appliqué à  $m$  et à la projection  $p$  de  $M$  sur le plan diamétral  $(Q)$  conjugué de  $O\lambda$ .

(A suivre.)