# Solutions de questions proposées

*Nouvelles annales de mathématiques 4e série*, tome 20 (1920), p. 153-160

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__153_1>

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

### 1820.

(1899, p. 196; 1917, p. 357.)

*Étant donnés dans un même plan, un faisceau de coniques ayant entre elles un double contact et une courbe algébrique $C_m^n$, on mène les tangentes communes à $C_m^n$ et à chaque conique; déterminer le lieu des points de contact sur les coniques.* V. Retali.

Solution

Par M. R. Bouvaist.

Si aux points A et B où se touchent les coniques du faisceau considéré on fait correspondre les points cycliques, ces coniques deviennent un faisceau de cercles concentriques. Le lieu cherché devient la podaire de la courbe transformée de $C_m^n$, par rapport au centre commun de ces cercles.

### 1821.

(1899, p. 146; 1917, p. 357.)

*Le lieu des sommets des paraboles tangentes à une conique centrale et ayant pour foyer un point fixe est une courbe unicursale du douzième ordre et de la dixième classe, ayant un point sextuple, avec deux coïncidences, en le point fixe et en chacun des points circulaires à l'infini; ayant, en outre, quatre points doubles ordinaires et six rebroussements.* V. Retali.

Solution

Par M. M.-F. Egan.

Soient O le point fixe, P le point de contact de la conique (C) avec la parabole, S le sommet de celle-ci, M le point de rencontre des tangentes en P et S. Les angles OSM, OMP sont droits, et les angles OMS, OPM sont égaux; donc M décrit la podaire de (C) par rapport à O, et S décrit la podaire de cette podaire.

On constate facilement que la podaire d'une courbe unicursale est unicursale. Cela posé, tout le reste de l'énoncé découle des formules données par Salmon ([1]) pour les podaires, et des formules de Plücker.

Autre solution par M. H. de Montille.

## 1890.

(1900, p. 574; 1917, p. 399.)

*Lorsque trois triangles sont homologiques deux à deux, si dans le triangle formé par les trois axes d'homologie, un sommet est un centre d'homologie, chacun des deux autres sommets est aussi un centre d'homologie.*

C. Blanc.

### Solution
Par M. R. B.

Démontrons la proposition corrélative, qui s'énonce ainsi :

*Lorsque trois triangles sont homologiques deux à deux, si dans le triangle formé par les trois centres d'homologie, un côté est un axe d'homologie, chacun des deux autres côtés est aussi un axe d'homologie.*

Or cela résulte du théorème suivant, connu et d'ailleurs facile à établir par des considérations d'homographie.

*Si un triangle* (T) *est inscrit à un triangle* (T'), *il existe une infinité de triangles circonscrits à* (T') *et inscrits à* (T).

Soient $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ les trois triangles de l'énoncé, $O_1$, $O_2$, $O_3$ leurs trois centres d'homologie ($O_1$ est le centre d'homologie de $A_2B_2C_2$ et $A_3B_3C_3$, etc.). Supposons que $O_2O_3$ soit l'axe d'homologie des triangles $A_2B_2C_2$ et $A_3B_3C_3$. Alors $A_2B_2$ et $A_3B_3$ par exemple se coupent en un point $\gamma_1$ appartenant à $O_2O_3$.

Soient $\gamma_2$ le point où $\gamma_1A_3B_3$ rencontre $O_1O_3$, et $\gamma_3$ le point où $\gamma_1A_2B_2$ rencontre $O_1O_2$. Le triangle (T) ou $O_1O_2O_3$ est inscrit au triangle (T') ou $A_1A_2A_3$. Le triangle $\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ est

---

([1]) *Higher Planes Curves* 1873, § 122, p. 103.

inscrit à (T) et a deux côtés, $\gamma_1\gamma_3$ et $\gamma_1\gamma_2$, passant respectivement par les sommets $A_2$ et $A_3$ de (T′). Donc, en vertu du théorème rappelé, son troisième côté $\gamma_2\gamma_3$ passe par le troisième sommet $A_1$ de (T′). Il passe de même par $B_1$. Autrement dit, $A_1B_1$ et $A_2B_2$ se coupent sur $O_1O_2$, $A_1B_1$ et $A_3B_3$ se coupent sur $O_1O_3$.

On a les mêmes relations entre $A_1C_1$ et $A_2C_2$ d'une part, $A_1C_1$ et $A_3C_3$ de l'autre. Donc $O_1O_2$ est l'axe d'homologie de $A_1B_1C_1$ et $A_2B_2C_2$, $O_1O_3$ l'axe d'homologie de $A_1B_1C_1$ et $A_3B_3C_3$. C'est bien ce qu'il fallait établir.

Autre solution par M. H. de Montille.

## 2010.

(1905, p. 96, 1917, p. 468)

*Si les triangles $a_1b_1c_1$, $a_2b_2c_2$, $a_3b_3c_3$ (désignés par leurs côtés) ont un centre O d'homologie, les neuf points de rencontre des droites du tableau*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

*avec leurs* associées mineures *sont en ligne droite.* [*L'associée mineure de $a_1$ est la droite $(b_2c_3, b_3c_2)$*] (1).

P. Sondat.

### Solution

Par M. R. B.

Désignons par $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les droites, issues du point O, qui contiennent les sommets des trois triangles, et soit

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

le tableau des associées mineures de leurs côtés. On observera

(1) L'énoncé contenait une faute d'impression : *trièdre* au lieu de *triangle*. De plus, il a paru avantageux de changer légèrement la notation.

que trois droites, désignées par une capitale et deux minuscules, affectées de trois indices différents, par exemple $A_1$, $b_2$ et $c_3$ sont concourantes. Cela résulte immédiatement de la définition de $A_1$.

Les triangles $a_2 b_2 c_2$, $a_3 b_3 c_3$ étant homologiques, les points $(a_2 a_3)$, $(b_2 b_3)$, $(c_2 c_3)$ sont en ligne droite. Donc les triangles $a_3 b_2 c_2$, $a_2 b_3 c_3$ sont aussi homologiques, et les trois droites

$$(b_2 c_2,\ b_3 c_3) \text{ ou } \alpha, \quad (c_2 a_3,\ c_3 a_2) \text{ ou } B_1, \quad (a_3 b_2,\ a_2 b_3) \text{ ou } C_1$$

sont concourantes. Autrement dit, $B_1$ et $C_1$ se coupent sur $\alpha$. De même $C_1$ et $A_1$ sur $\beta$, $A_1$ et $B_1$ sur $\gamma$. Les droites $A_2 B_2 C_2$, $A_3 B_3 C_3$ donnent lieu à des remarques analogues. En définitive, *les trois triangles* $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$, $A_3 B_3 C_3$ *ont leurs sommets sur* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ *et sont par conséquent en relation d'homologie avec chacun des triangles* $a_1 b_1 c_1$, $a_2 b_2 c_2$, $a_3 b_3 c_3$.

Considérons maintenant les deux triangles $a_2 B_1 C_1$ et $A_2 b_1 c_1$ On reconnaît que :

Les sommets $B_1 C_1$ et $b_1 c_1$ sont tous deux sur $\alpha$,
Les sommets $C_1 a_2$ et $c_1 A_2$ sont tous deux sur $b_3$,
Les sommets $a_2 B_1$ et $A_2 b_1$ sont tous deux sur $c_3$,

les deux derniers faits résultant d'une remarque faite au début. Or les droites $\alpha$, $b_3$, $c_3$ concourent. Les deux triangles dont il s'agit sont donc homologiques, et l'on en conclut que les points $a_2 A_2$, $B_1 b_1$, $C_1 c_1$ sont en ligne droite, c'est-à-dire que le point $a_2 A_2$ est sur l'axe d'homologie des triangles $a_1 b_1 c_1$, $A_1 B_1 C_1$. Il en est de même du point $b_2 B_2$. Donc l'axe d'homologie des triangles $a_2 b_2 c_2$, $A_2 B_2 C_2$ est confondu avec le premier axe. Il en est encore ainsi de l'axe d'homologie des triangles $a_3 b_3 c_3$, $A_3 B_3 C_3$, ce qui établit la proposition.

## 2064.

(1907, p. 95; 1917, p. 470.)

*Un point* C *se meut sur un cercle de rayon égal à l'unité. Un autre, situé originellement au centre* O *du cercle, se meut avec la même vitesse que* C *sur une courbe dont la tangente passe constamment par ce point. Démontrer que le rayon de courbure en un point quelconque* M *de cette* *courbe est égal au segment intercepté sur le rayon* OC *par la normale en* M.

## 2065.

(1907, p. 95, 1917, p. 470)

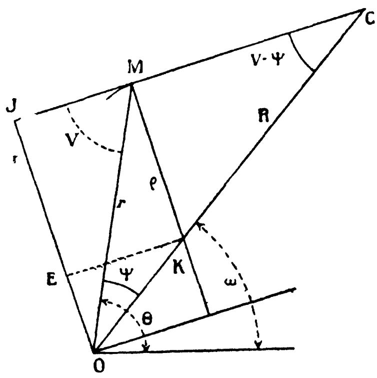
*On considère le rayon de courbure* $\rho$ *de la courbe, dont il s'agit dans la question précédente, comme fonction de la distance* $p$ *de l'origine à la tangente à cette courbe. Former l'équation différentielle qui lie* $\rho$ *à* $p$.

W. Kapteyn

### Solution

Par M. H. de Montille (1).

En appelant $\Psi$ la différence $\theta - \omega$ des angles polaires respectifs $\widehat{MOx}$ et $\widehat{COx}$ des points M et C, R (pour l'homogé-




néité) le rayon du cercle, les relations des sinus des angles des triangles MOK, OCM donnent (K étant le centre de

(1) La question 2064 a été résolue par une lettre de M. M. d'Ocagne (**1907**, p. 173). Son énoncé n'est rappelé que pour rendre intelligible l'énoncé 2065.

courbure), en posant $OM = r$, $\widehat{OMC} = \pi - V$ :

$$(1) \qquad \frac{\rho}{\sin\Psi} = \frac{r}{\cos(V-\Psi)} = \frac{r\cos V}{\sin(V-\Psi)},$$

$$(2) \qquad \frac{r}{\sin(V-\Psi)} = \frac{R}{\sin V}.$$

L'égalité des deux derniers rapports (1) donne de suite la relation

$$(3) \qquad \operatorname{tang}(V-\Psi) = \cos V,$$

propre à *toute courbe de poursuite*. Or, en multipliant les membres de l'équation (2) par $\operatorname{tang}(V-\Psi)$, et comparant à (1), on trouve, en tenant compte de (3),

$$(4) \qquad \frac{r}{\cos(V-\Psi)} = R\cot V = \frac{\rho}{\sin\Psi}.$$

La relation $\frac{\rho}{\sin\Psi} = R\cot V$ est propre à la courbe de poursuite de l'énoncé : ce sera notre formule (4). Tirons alors de (1) et (2)

$$(5) \qquad \cos(V-\Psi) = r\frac{\sin\Psi}{\rho}; \qquad \sin(V-\Psi) = r\frac{\sin V}{R};$$

élevant au carré les deux membres des relations (5), nous trouverons

$$\frac{1}{r^2} = \left(\frac{\sin\Psi}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\sin V}{R}\right)^2$$

ou

$$(6) \qquad \left(\frac{\sin\Psi}{\rho}\right)^2 = \frac{1}{r^2} - \frac{\sin^2 V}{R^2},$$

ou, en tenant compte de (4) et de la relation générale,

$$(7) \qquad p = r\sin V,$$

$$(8) \qquad \frac{\operatorname{tang}^2 V}{R^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{p^2}{r^2 R^2} = \frac{R^2 - p^2}{r^2 R^2}$$

ou

$$\operatorname{tang}^2 V = \frac{R^2 - p^2}{r^2}.$$

On va obtenir l'équation différentielle demandée, en combinant la relation (8), écrite

$$(8') \qquad r^2 = (R^2 - p^2)\cot^2 V,$$

propre à la courbe de l'énoncé, et la relation générale (7) : celle-ci, en effet, nous donne

$$(9) \qquad \frac{p^2}{r^2} = \sin^2 V.$$

En multipliant membre à membre par la relation (8'), il vient

$$(10) \qquad \frac{p^2}{R^2 - p^2} = \cos^2 V.$$

Additionnant membre à membre, on obtient l'équation de la courbe en coordonnées $p$ et $r$ :

$$(11) \qquad \frac{1}{r^2} + \frac{1}{R^2 - p^2} = \frac{1}{p^2},$$

c'est-à-dire

$$(12) \qquad r^2 = p^2\left(1 + \frac{p^2}{R^2 - 2p^2}\right).$$

Or, en différentiant les deux membres, le premier devient $2r\,dr$; et comme, en vertu d'une formule connue,

$$\rho = \frac{r\,dr}{dp},$$

l'équation différentielle demandée est

$$(13) \qquad 2\rho\,dp = d\left[p^2\left(1 + \frac{p^2}{R^2 - 2p^2}\right)\right]$$

ou

$$(14) \qquad \frac{dp}{d\left[\dfrac{p^2(p^2 - R^2)}{2p^2 - R^2}\right]} = \frac{1}{2\rho}$$

avec $R = 1$, comme le particularise l'énoncé. Telle est la forme, *à variables séparées*, de cette équation.

Outre les formules (3), (4), (8'), (11), on trouvera, en considérant le triangle OKE, la relation $\rho = p\left(1 - \frac{\cos^2 V}{\sin V}\right)$, ou

$$(15) \qquad \rho = r(\sin V - \cos V),$$

propre à la courbe, ou encore $p - \rho = \text{séc}^2 V r$; ou

$$(16) \qquad \rho = r\left[\left(\frac{p}{r}\right)^2 + \left(\frac{p}{r}\right) - 1\right],$$

et la relation $p = R\sin(V - \Psi)$, commune aux courbes de poursuite.