Nouvelles annales de mathématiques

T. Lemoyne

Lieux des foyers ordinaires des courbes algébriques d'un faisceau tangentiel ou ponctuel

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 20 (1920), p. 14-17

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__14_1>

[$M^1 3g$]

LIEUX DES FOYERS ORDINAIRES DES COURBES ALGÉBRIQUES D'UN FAISCEAU TANGENTIEL OU PONCTUEL ;

PAR M. T. LEMOYNE.

Considérons les courbes (C), de classe n, appartenant à un système de caractéristiques (μ, ν), c'est-à-dire telles qu'il y a μ courbes analogues passant par un point quelconque et ν autres courbes analogues touchant une droite quelconque. Cherchons le lieu du point d'intersection des tangentes qu'on peut mener aux courbes (C) par deux points fixes P et Q.

L'ordre de ce lieu est égal au nombre des points du lieu situés sur une droite quelconque, par exemple sur une droite Δ passant en P. Supposons que les courbes (C) n'admettent pas PQ pour tangente commune et ne passent par aucun point fixe de cette droite.

Il y a ν courbes (C) tangentes à la droite PQ et ν seulement. Pour chacune de ces ν courbes, le point P est $(n-1)$ fois point de rencontre de la tangente QP et des $(n-1)$ tangentes autres que PQ que l'on peut mener de P à cette courbe, par conséquent le lieu passe $\nu(n-1)$ fois en P; autrement dit, le point P est point multiple d'ordre $\nu(n-1)$ du lieu. Il en est évidemment de même du point Q.

D'autre part, il y a ν courbes (C) tangentes à la droite PΔ; les $n\nu$ tangentes qu'on peut leur mener du point Q rencontrent encore PΔ en $n\nu$ points du lieu, et il n'y en a pas d'autres sur PΔ.

On en conclut que le lieu cherché est une courbe d'ordre $\nu(2n-1)$, qui admet P et Q pour points multiples d'ordre $\nu(n-1)$ et coupe d'ailleurs encore la droite PQ aux ν points où elle est touchée par les ν courbes (C) qui lui sont tangentes.

Nous pouvons donc dire que :

1. *Si de deux points fixes* P, Q *on mène les tangentes aux courbes de classe n qui appartiennent à un système de caractéristiques* (μ, ν) *et qui, de plus, n'admettent pas* PQ *pour tangente commune et ne passent par aucun point fixe de cette droite, le lieu des points d'intersection de ces tangentes est une courbe d'ordre* $\nu(2n-1)$ *admettant les points* P *et* Q *pour points multiples d'ordre* $\nu(n-1)$.

Prenons pour points P et Q les points cycliques du plan, les points d'intersection des tangentes sont foyers ordinaires des courbes (C), donc :

2. *Le lieu des foyers des courbes de classe n appartenant à un système de caractéristiques* (μ, ν), *ne touchant pas toutes la droite de l'infini et n'ayant pas leurs directions asymptotiques données, est une courbe d'ordre* $\nu(2n-1)$ *admettant les points cycliques pour points multiples d'ordre* $\nu(n-1)$.

Lorsque $\nu = 1$, les courbes (C) appartiennent à un faisceau tangentiel. Par suite :

3. *Le lieu des foyers d'un faisceau tangentiel de courbes de classe n, non tangentes à la droite de l'infini, est une courbe d'ordre $2n - 1$ qui admet les points cycliques pour points multiples d'ordre $n - 1$.*

En particulier :

Le lieu des foyers d'un faisceau tangentiel de coniques à centre est une cubique circulaire.

Supposons maintenant que les courbes (C) appartenant à un système (μ, ν) soient les courbes d'ordre m d'un faisceau ponctuel. On sait que dans un faisceau ponctuel de courbes d'ordre m, il y a $2(m - 1)$ courbes tangentes à une droite quelconque; on a donc $\nu = 2(m - 1)$ et, comme la classe n des courbes (C) est égale à $m(m - 1)$, on en conclut que le lieu des foyers de ces courbes est d'ordre

$$\nu(2n - 1) = 2(m - 1)[2m(m - 1) - 1].$$

Ainsi :

4. *Le lieu des foyers des courbes d'ordre m appartenant à un faisceau ponctuel et n'ayant aucune direction asymptotique donnée est une courbe d'ordre $2(m - 1)[2m(m - 1) - 1]$ qui admet les points cycliques pour points multiples d'ordre $2(m - 1)[m(m - 1) - 1]$.*

En particulier :

Le lieu des foyers des coniques d'un faisceau ponctuel, n'ayant aucune direction asymptotique donnée, est une sextique bicirculaire.

Si dans le théorème 2 on fait $n = 2$, on obtient le théorème suivant, dû à Chasles (1) :

Le lieu des foyers des coniques d'un système (μ, ν) *qui ne touchent pas la droite de l'infini et n'ont pas leurs directions asymptotiques données est une courbe d'ordre* 3ν *admettant les points cycliques pour points multiples d'ordre* ν.