

T. LEMOYNE

**Sur un théorème de Cornu relatif
aux caustiques**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 20
(1920), p. 142-145

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__142_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1920, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[O'2qβ]

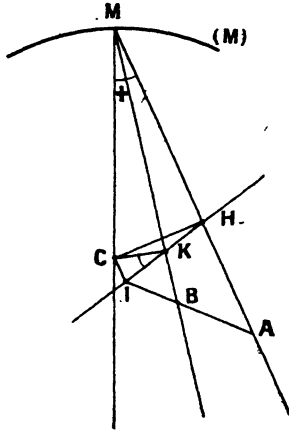
SUR UN THÉORÈME DE CORNU RELATIF AUX CAUSTIQUES;

PAR M. T. LEMOYNE.

Dans les *Nouvelles Annales* de 1915, M. d'Ocagne
a donné une démonstration géométrique fort élégante

d'un théorème de Cornu concernant la construction des caustiques, démonstration qu'il a introduite depuis dans son *Cours de Géométrie pure et appliquée de l'École Polytechnique*, t. I, p. 142, comme application d'une formule de géométrie infinitésimale due à Mannheim.

Je me propose de montrer que le théorème de Cornu est une conséquence presque immédiate de la formule classique de Thomas Young, qui lie les longueurs des rayons incident et réfracté des caustiques. (La formule de Thomas Young est étudiée dans les *Traité d'Optique géométrique*; elle figure en particulier dans le *Cours de Physique* de Fernet et Faivre-Dupaigre, pour la classe de Mathématiques spéciales, 4^e édition, p. 166. Nous en avons donné une démonstration géo-



métrique simple, d'ailleurs bien connue, dans notre Ouvrage, *Courbes géométriques remarquables*, t. I, p. 128.)

Soient MA et MB (voir figure) un rayon incident et le rayon réfracté correspondant, A et B les points où ils

touchent respectivement leurs enveloppes, **M** le point où ils rencontrent la courbe dirimante (**M**), **C** le centre de courbure de (**M**) en ce point. Posons $MA = l$, $MB = l'$, $MC = R$ et désignons par i et r les angles d'incidence et de réfraction. La formule de Thomas Young s'écrit

$$\frac{n \cos^2 r}{l'} - \frac{\cos^2 i}{l} = \frac{n \cos r - \cos i}{R}.$$

En multipliant les deux membres par $ll'R$, on la met sous la forme

$$R(nl \cos^2 r - l' \cos^2 i) = ll'(n \cos r - \cos i)$$

ou

$$nl \cos r (l' - R \cos r) = l' \cos i (l - R \cos i),$$

ce qu'on peut écrire

$$\frac{l}{l'} \frac{l' - R \cos r}{l - R \cos i} \frac{n \cos r}{\cos i} = 1.$$

Projetons **C** en **H** et **K** sur **MA**, **MB**, et en **I** sur **HK**. Nous avons

$$\frac{l}{l'} = \frac{AM}{BM}, \quad \frac{l' - R \cos r}{l - R \cos i} = \frac{BK}{AH},$$

$$\frac{n \cos r}{\cos i} = \frac{R \sin i \cos r}{R \sin r \cos i} = \frac{CH \cos r}{CK \cos i} = \frac{IH}{IK}$$

et, par conséquent, la formule de Young s'écrit finalement

$$\frac{AM}{AH} \frac{IH}{IK} \frac{BK}{BM} = 1.$$

Sous cette forme, elle montre, d'après la réciproque du théorème de Ménélaüs appliqué au triangle **MHK**, que les points **I**, **A**, **B** sont en ligne droite. Donc :

THÉORÈME DE CORNU. — *La droite qui joint les points A et B où le rayon incident MA et le rayon*

réfracté MB touchent leurs enveloppes, passe par la projection orthogonale I du centre de courbure C de la courbe dirimante en M sur la droite HK qui joint les projections orthogonales de ce même centre C sur les rayons MA et MB.

Dans le cas de la réflexion, MA et MB sont symétriques par rapport à la normale MC, et HK est perpendiculaire à MC. On retrouve alors la construction suivante du point où MB touche son enveloppe, énoncée par J.-H. Grillet, dans le *Journal de Liouville*, 1846, t. XI, p. 104 :

Quand un rayon lumineux issu d'une source A se réfléchit en un point M d'une courbe (M), le point où le rayon réfléchi MB touche la caustique s'obtient en projetant orthogonalement en K sur MB le centre de courbure de la courbe (M) au point M, puis K en I sur la normale MC; la droite AI coupe le rayon réfléchi au point cherché.

Cette construction se déduit encore avec facilité de la formule de Petit :

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{l'} = \frac{2}{R \cos i},$$

qu'on obtient d'ailleurs en faisant $n = -1$ et $i = r$ dans celle de Thomas Young.