

## Solutions de questions proposées

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 20 (1920), p. 117-120

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1920\\_4\\_20\\_\\_117\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__117_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1920, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

**SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.**

---

**1825.**

(1899, p. 340; 1917, p. 358.)

*Les côtés BC, CA, AB du triangle ABC sont coupés en A', B', C' par les bissectrices extérieures des angles opposés et en A'', B'', C'' par la droite r sur laquelle se trouvent les*

centres du cercle inscrit et du cercle circonscrit Démontrer que les trois cercles  $AA'A''$ ,  $BB'B''$ ,  $CC'C''$  se coupent sur la droite  $r$ .

G. GALLUCCI.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Le cercle  $AA'A''$  coupe  $r$  en un point  $K$  tel que ( $O$  et  $I$  étant les centres des cercles circonscrit et inscrit)

$$\widehat{AKI} = \widehat{AA''B} = \frac{\widehat{C-B}}{2} = \widehat{OAI},$$

d'où la relation

$$\overline{OI} \cdot \overline{OK} = \overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 = \overline{OC}^2;$$

le point  $K$  est donc aussi sur les cercles  $BB'B''$  et  $CC'C''$ .

2314.

( 1917. p. 190. )

Deux points  $A$  et  $B$  marqués sur une droite décrivent deux droites rectangulaires  $y'y$  et  $x'x$ ; un point  $M$  marqué sur la droite décrit une ellipse. Si l'on désigne par  $x_1$  et  $y_1$  les coordonnées du point où la droite  $AB$  est tangente à son enveloppe, par  $x_2$  et  $y_2$  les coordonnées du centre de courbure en  $M$ , on a, en posant  $\overline{MA} = a$ ,  $\overline{MB} = b$  :

$$\frac{y_2}{x_2} : \frac{y_1}{x_1} = \frac{a}{b}, \quad \frac{x_2}{x_1} = \frac{a+b}{a}, \quad \frac{y_2}{y_1} = \frac{a+b}{b}.$$

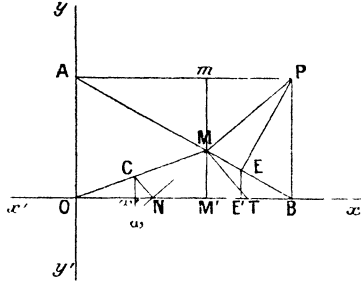
G. FONTENÉ.

SOLUTION

Par M. J. LEMAIRE.

Soient  $P$  le point projeté en  $A$  et  $B$  sur  $y'y$  et  $x'x$ ,  $E$  sa projection sur  $AB$ ,  $M'$  et  $E'$  les projections de  $M$  et  $E$  sur  $x'x$ ,  $m$  le point où  $MM'$  coupe  $AP$ . La droite  $AB$  touche son enveloppe en  $E$ , la normale en  $M$  à l'ellipse décrite par ce point est  $PM$  qui rencontre  $x'x$  en  $N$ ; menons la tangente en  $M$  qui coupe  $x'x$  en  $T$ . Si par le centre de courbure  $\omega$  en  $M$  nous traçons la parallèle à  $y'y$  qui rencontre  $OM$  en  $C$ , on sait que

NC est perpendiculaire à la normale-(construction de Mannheim); appelons  $\omega'$  le point commun à  $\omega C$  et  $x'x$ .



A et B étant supposés fixes, si M se déplace, M' et T sont en correspondance homographique, et comme OM' et OT sont nuls et infinis en même temps, le rapport  $\frac{OM'}{OT}$  reste constant; de même le rapport égal  $\frac{O\omega'}{ON}$ ; en plaçant M en E, on obtient

$$(1) \quad \frac{O\omega'}{ON} = \frac{OE'}{OB},$$

d'où

$$\frac{O\omega'}{OE'} = \frac{ON}{OB} \frac{\overline{OB} + \overline{BN}}{\overline{OB}} = 1 + \frac{\overline{BN}}{\overline{OB}} = 1 + \frac{\overline{BM'}}{\overline{AM}} = 1 + \frac{b}{a},$$

c'est la deuxième relation demandée; nous avons supposé  $MA > MB$ . La figure donne encore

$$\frac{\omega\omega'}{EE'} = \frac{\omega\omega'}{MM'} \cdot \frac{EE'}{MM'} = \frac{N\omega'}{MM'} \frac{BE'}{BM'} = \frac{N\omega'}{BE'} \times \frac{BM'}{NM'};$$

mais de (1), on déduit

$$\frac{ON - O\omega'}{ON} = \frac{OB - OE'}{OB}$$

ou

$$\frac{N\omega'}{ON} = \frac{BE'}{OB},$$

et par suite

$$\frac{N\omega'}{BE'} = \frac{ON}{OB} = \frac{a+b}{a};$$

on en conclut

$$\frac{\omega\omega'}{\overline{EE'}} = \frac{a+b}{a} \times \frac{Am}{Pm} = \frac{a+b}{a} \times \frac{AM}{BM}$$

et en tenant compte des signes

$$\frac{\overline{\omega\omega'}}{\overline{EE'}} = \frac{a+b}{b};$$

c'est la troisième relation de l'énoncé. La première est enfin une conséquence des deux autres. Ces relations montrent que la développée d'une ellipse est une transformée homographique d'une hypocycloïde à quatre rebroussements.

Autre solution, par *Un abonné*.