Nouvelles annales de mathématiques

Certificats de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 20 (1920), p. 105-117

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__105_1>

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Montpellier.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Une courbe* C *est représentée par les équations*

$$x = a\lambda \cos t, \qquad y = b\lambda \sin t, \qquad z = \frac{\lambda^2}{2}(a \cos^2 t + b \sin^2 t),$$

où t *est un paramètre variable.*

1° *Former l'équation de la surface S engendrée par la perpendiculaire abaissée de chaque point de la courbe sur l'axe OZ.*

2° *Si λ varie, la courbe C engendre un paraboloïde. Calculer l'aire de ce paraboloïde, limité à la courbe C correspondant à une valeur donnée de λ.*

3° *Calculer le volume limité par le paraboloïde et la surface S.*

4° *Calculer la valeur de l'intégrale triple*

$$\int\int\int [x^2 + y^2 - z(a+b)]\,dx\,dy\,dz$$

à l'intérieur de ce volume.

Solution. — 1° L'équation de la surface S s'obtient en éliminant t entre les équations de la perpendiculaire à Oz :

$$z = \frac{\lambda^2}{2}(a\cos^2 t + b\sin^2 t), \qquad \frac{ay}{bx} = \frac{\sin t}{\cos t},$$

$$z = \frac{\lambda^2}{2} ab \frac{bx^2 + ay^2}{b^2x^2 + a^2y^2}.$$

2° L'équation du paraboloïde s'obtient en éliminant λ et t :

$$2z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}.$$

L'aire de ce paraboloïde sera donné par la formule

$$\begin{aligned} A &= \int\int\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy \\ &= \int\int\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy. \end{aligned}$$

Si l'on remplace x et y en fonction de λ et t, variables indépendantes, l'élément $dx\,dy$ sera remplacé par

$$\begin{vmatrix} a\cos t & -\lambda a \sin t \\ b \sin t & \lambda b \cos t \end{vmatrix} d\lambda\, dt = \lambda ab\, d\lambda\, dt,$$

$$A = \int\int \sqrt{1+\lambda^2}\,\lambda ab\, d\lambda\, dt,$$

où t varie de 0 à 2π, λ de 0 à une valeur donnée $\lambda = \mu$:

$$A = 2\pi ab \int_0^{\mu} \sqrt{1+\lambda^2}\,\lambda\, d\lambda = \frac{2}{3}\pi ab\left[(1+\mu^2)^{\frac{3}{2}} - 1\right].$$

3° La surface S et le paraboloïde se coupent suivant la courbe C, dont la projection sur le plan xOy est l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \mu^2.$$

Le volume compris entre ces deux surfaces sera

$$V = \int\int \left[\frac{\mu^2}{2}\, ab\, \frac{bx^2 + ay^2}{b^2x^2 + a^2y^2} - \frac{x^2}{2a} - \frac{y^2}{2b}\right] dx\, dy,$$

où

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < \mu^2;$$

$$V = \int_0^{\mu}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\mu^2}{2}\, a^2b^2\, \frac{a\cos^2 t + b\sin^2 t}{a^2b^2} - \frac{a}{2}\lambda^2\cos^2 t - \frac{b}{2}\lambda^2 \sin^2 t\right] ab\lambda\, d\lambda\, dt.$$

Mais

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t\, dt = \pi,$$

$$V = \frac{\pi}{2}\int_0^{\mu} (a+b)(\mu^2 - \lambda^2) ab\lambda\, d\lambda = \pi ab\, \frac{a+b}{8}\, \mu^4.$$

4° $$I = \int\int\int [x^2 + y^2 - z(a+b)]\, dx\, dy\, dz$$

$$= \int\int \left[(x^2+y^2)z - \frac{z^2}{2}(a+b)\right]_{z_1}^{z_2} dx\, dy$$

$$= \int\int (z_2 - z_1)\left[x^2 + y^2 - (a+b)\frac{z_2+z_1}{2}\right] dx\, dy,$$

où

$$z_2 = \frac{\mu^2}{2}(a\cos^2 t + b\sin^2 t), \qquad z_1 = \frac{\lambda^2}{2}(a\cos^2 t + b\sin^2 t):$$

$$\begin{aligned} \mathrm{I} = \int_0^{\mu}\int_0^{2\pi} & \frac{\mu^2-\lambda^2}{2}(a\cos^2 t + b\sin^2 t) \\ & \times\Big[\lambda^2(a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t) \\ & \quad - \frac{a+b}{4}(\mu^2+\lambda^2)(a\cos^2 t + b\sin^2 t)\Big]\, ab\lambda\, d\lambda\, dt; \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^4 t\, dt = \int_0^{2\pi}\frac{1}{8}(\cos 4t + 4\cos 2t + 3)\, dt = \frac{3}{4}\pi,$$

$$\int_0^{2\pi}\sin^4 t\, dt = \frac{3}{4}\pi, \qquad \int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t = \frac{\pi}{4};$$

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \frac{\pi}{8}\int_0^{\mu}(\mu^2-\lambda^2) \\ & \quad \times\Big[\lambda^2(3a^3 + a^2 b + ab^2 + 3b^3) \\ & \qquad - \frac{a+b}{4}(\mu^2+\lambda^2)(3a^2 + 2ab + 3b^2)\Big]\, ab\, d\lambda \\ &= \frac{\pi}{8}(a+b)ab\Big[\frac{3}{4}(a^2+b^2)\Big(-\frac{3}{5}\lambda^5 + \frac{4}{3}\lambda^3\mu - \lambda\mu^4\Big) \\ & \qquad + \frac{ab}{2}\Big(\lambda^5 - \frac{1}{3}\lambda^3\mu^2 - \lambda\mu^4\Big)\Big]_{\lambda=0}^{\mu} \\ &= -\frac{\pi}{8}(a+b)ab\Big(\frac{a^2+b^2}{5} + \frac{2}{3}ab\Big)\mu^5. \end{aligned}$$

Epreuve pratique. — *Intégrer l'équation différentielle*

$$(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} - 6x^2 - 2 = 0,$$

sachant qu'elle a une solution de la forme $y = x^\alpha$.

Trouver une solution particulière qui s'annule pour $x = 0$, *sa dérivée prenant la valeur* $y' = 1$.

Solution. — La substitution donne la seule hypothèse possible $y = x^2$. Si l'on pose

$$y = x^2 + z \qquad \text{et} \qquad \frac{dz}{dx} = u,$$

on a

$$\frac{du}{dx} + \frac{2x}{1+x^2} u = 0, \qquad Lu + L(1+x^2) = Lc,$$

$$u = \frac{c}{1+x^2}, \qquad z = c \operatorname{arc\,tang} x + c',$$

$$y = c \operatorname{arc\,tang} x + c' + x^2$$

et la solution particulière

$$y = x^2 + \operatorname{arc\,tang} x,$$

où $\operatorname{arc\,tang} x = 0$. (Avril 1919.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Intégrer l'équation aux dérivées partielles*

$$2xz \frac{\partial z}{\partial x} + 2yz \frac{\partial z}{\partial y} + x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

Déterminer une surface intégrale passant par la courbe

$$y = xe^x, \qquad z^2 = x^2 - y^2.$$

Déterminer les lignes de courbure de cette surface, et montrer qu'elles sont situées sur des sphères passant par l'origine.

SOLUTION. — Le système d'équations différentielles des caractéristiques donne

$$\frac{dx}{2xz} = \frac{dy}{2yz} = \frac{dz}{z^2 - x^2 - y^2} = \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{z(x^2 + y^2 + z^2)},$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{d(x^2 + y^2 + z^2)}{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = cx, \qquad y = c'x.$$

L'intégrale générale sera

$$x^2 + y^2 + z^2 = xf\left(\frac{y}{x}\right).$$

Une courbe caractéristique rencontrera la courbe donnée, si l'on a

$$2x^2 = cx, \qquad e^x = c', \qquad c = 2Lc';$$

la surface cherchée, lieu de ces caractéristiques, aura pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2x \,\mathrm{L}\, \frac{y}{x}.$$

Pour la surface intégrale

$$x^2 + y^2 + z^2 = xf\left(\frac{y}{x}\right),$$

on a

$$2(x + pz) = f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right), \qquad 2(y + qz) = f'\left(\frac{y}{x}\right),$$

où $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$. Les lignes de courbure sont données par l'équation différentielle

$$\frac{d(x + pz)}{dp} = \frac{d(y + qz)}{dq},$$

$$\frac{-\frac{y}{r} f''\left(\frac{y}{x}\right) d\,\frac{y}{x}}{dp} = \frac{f''\left(\frac{y}{x}\right) d\,\frac{y}{r}}{dq},$$

qui se décompose :

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = 0, \qquad x\,dp + y\,dq = 0.$$

Le premier système de lignes de courbure est donné par

$$y = cx, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = xf(c),$$

où c est arbitraire.

Pour le second système,

$$dz = p\,dx + q\,dy = d(px + qy), \qquad z = px + qy + c',$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2z(px + qy) = xf\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2c'z = x^2 + y^2 + z^2 = xf\left(\frac{y}{x}\right),$$

ou

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2c'z, \qquad 2c'z + xf\left(\frac{y}{x}\right).$$

Pour la surface particulière considérée, on a les deux systèmes de lignes de courbure

$$y = cx, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 2x\,\mathrm{L}c,$$
$$c'z = x\,\mathrm{L}\,\frac{y}{x}, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 2c'z.$$

Épreuve pratique. — *On considère la fonction*

$$f(z) = \frac{z-3}{z(z^2-1)^2(z-2)^2}$$

1° *Calculer l'intégrale* $\mathrm{I} = \int f(z)\,dz$ *le long d'un cercle ayant son centre à l'origine, son rayon étant successivement égal à* $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$, *dans le sens trigonométrique.*

2° *Existe-t-il un cercle de centre* $z_0 = \frac{i}{2}$ *dans lequel la fonction*

$$\varphi(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$$

soit une fonction uniforme de sa limite supérieure z.

Solution. — 1° En posant successivement $z = 1 + u, -1 + u$ et $2 + u$, et en formant les deux premiers termes du développement, suivant les puissances de u, du produit $u^2 f$, on trouve

$$f(z) = -\frac{3}{4z} - \frac{1}{2(z-1)^2} + \frac{1}{4(z-1)} + \frac{1}{9(z+1)^2}$$
$$+ \frac{29}{108(z+1)} - \frac{1}{18(z-2)^2} + \frac{25}{108(z-2)}.$$

Les pôles $z = 0, 1, -1, 2$ ont les résidus $-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{29}{108}, \frac{25}{108}$.

L'intégrale, autour de chaque pôle, est égale au produit du résidu par $2\pi i$. L'intégrale sur chaque cercle est la somme des intégrales autour des pôles intérieurs. Pour les trois cercles donnés, on a

$$\mathrm{I}_1 = -\frac{3}{2}\pi i, \qquad \mathrm{I}_2 = 2\pi i\left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{29}{108}\right) = -\frac{25}{54}\pi i,$$
$$\mathrm{I}_3 = 0.$$

2° Un cercle de rayon $\frac{1}{2}$ et de centre $\frac{i}{2}$, passe par o et ne comprend aucun pôle à l'intérieur; $\varphi(z)$ est uniforme dans ce cercle. (Juin 1919.)

Paris.

Épreuve théorique. — I. *Soient* Ox, Oy, Oz *trois axes de coordonnées rectangulaires et* D *une droite du plan des* xy *parallèle à* Ox, *représentée par les équations*

$$D(z = 0, y = h).$$

D'un point quelconque M *de l'espace, on abaisse la perpendiculaire* MP *sur* D, *et la perpendiculaire* MQ *sur* Oz. *On demande l'équation générale des surfaces* S, *telles que le plan tangent en un point quelconque* M *de l'une d'elles soit parallèle à la droite* PQ *correspondante.*

Démontrer qu'il existe une infinité de surfaces de cette espèce dépendant de deux constantes arbitraires, qui sont des surfaces développables.

Trouver la relation qui lie les coefficients angulaires du plan tangent à l'une de ces surfaces.

Peut-on choisir les constantes dont dépendent ces surfaces développables de façon que l'arête de rebroussement soit une hélice?

II. *Déterminer une fonction analytique*

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y),$$

de la variable complexe $z = x + iy$, *sachant que* $P(x, y)$ *est une fonction de* $u = \sqrt{x^2 + y^2} + x$, *et* $Q(x, y)$ *une fonction de* $v = \sqrt{x^2 + y^2} - x$.

Solution. — I. Si l'*on permute les noms des axes* Oy *et* Oz *de l'énoncé*, l'équation aux dérivées partielles des surfaces S s'écrit

$$px - qy = h. \tag{1}$$

Toute surface développable est d'ailleurs solution de l'équation

$$q = f(p).$$

Exprimons que ces équations sont compatibles en annulant le crochet de Jacobi qui leur correspond :

$$q + pf'(p) = 0.$$

La fonction f est définie par

$$f + pf' = 0 \qquad \text{ou} \qquad pf = \text{const.} = a.$$

Les coefficients du plan tangent sont donc liés par la relation

$$(2) \qquad pq = a.$$

Résolvons en p et q les équations (1) et (2) et formons l'expression de dz,

$$dz = \frac{h \pm \sqrt{h^2 + 4axy}}{2x}\,dx - \frac{h \mp \sqrt{h^2 + 4axy}}{2y}\,dy.$$

Par intégration, nous obtenons une famille de surfaces développables dépendant de deux constantes arbitraires et répondant à la question

$$2z = h \log \frac{x}{y} \pm \int \frac{\sqrt{h^2 + 4axy}\, d(xy)}{xy} + b.$$

Si l'arête de rebroussement est une hélice, le plan tangent à la surface S, osculateur à cette hélice, de coefficients p, $\frac{a}{p}$, -1, fait un angle constant avec une direction fixe (A, B, C); d'où la condition

$$\frac{(Ap^2 + Ba - Cp)^2}{p^2 + p^4 + a^2} = \text{const.}$$

qui donne $2a = \pm 1$, la direction étant $(1, \pm 1, 0)$. Les valeurs obtenues de p et q doivent donc rendre constante l'expression $\frac{p \pm q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$ ou, puisque $pq = a$, l'expression $p^2 + q^2$; pour $x = y$, celle-ci se réduit à $\frac{4h^2}{x^2} + 1$; d'où $h = 0$. On a alors une famille de cônes, $4(2z - b)^2 = xy$.

II. Soit $P = f(u)$, $Q = g(v)$; les conditions d'analyticité donnent

$$u f'(u) = y g'(v), \qquad y f'(u) = v g'(v);$$

on en déduit

$$u f'^2(u) = v g'^2(v) = \text{const.}$$

A une constante additive et à un facteur constant près, P et Q sont égaux à $\sqrt{u}$ et $\sqrt{v}$, ou, en posant $x = \rho \cos\varphi$, $y = \rho \sin\varphi$, à $\sqrt{\rho}\cos\frac{\varphi}{2}$ et $\sqrt{\rho}\sin\frac{\varphi}{2}$. Par suite, $f(z) = A\sqrt{z} + B$, A et B étant des constantes arbitraires.

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *En intégrant la fonction* $\frac{1}{\sqrt{1+z^4}}$, *suivant un contour convenable, démontrer la relation*

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \sqrt{2}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

2° *Utiliser la relation précédente pour calculer l'intégrale du premier membre à une unité près, par défaut.*

SOLUTION. — 1° La fonction $f(z) = \frac{1}{\sqrt{1+z^4}}$ présente quatre branchements A, B, C, D $\left(\frac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}}\right)$. Prenons un contour formé par l'axe Ox, un quart de cercle de très grand rayon et l'axe yO; l'intégrale le long du cercle tend vers zéro; les autres tendent vers

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} - \int_\infty^0 \frac{i\,dy}{\sqrt{1+y^4}} \qquad \text{ou} \qquad (1+i)\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}.$$

Prenons d'autre part le lacet allant de l'origine au point critique $A\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$; l'intégrale suivant le petit cercle entourant le point A tend vers zéro; et l'on obtient, en posant

$$z = \rho\,\frac{1+i}{\sqrt{2}},$$

$$2\,\frac{1+i}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho^4}}.$$

Comme il n'y a pas de points critiques entre les deux contours, les valeurs de l'intégrale sont égales et la formule proposée est établie.

2° En posant $x = \sin\varphi$, on obtient

$$I = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}\,d\varphi.$$

Comme on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p}\varphi\,d\varphi = \frac{\pi}{2}\,\frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4.6\ldots 2p},$$

il vient

$$I = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\left[1 - \frac{1}{4} + \frac{9}{64} - \ldots\right],$$

quantité comprise entre 1,65 et 1,97; sa valeur à une unité près par défaut est l'unité. (Juin 1919.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Démontrer que toute équation différentielle de la forme*

$$(y-x)y'' + F(y') = 0, \qquad y' = \frac{dy}{dx}, \qquad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$$

admet une intégrale première de la forme

$$(y-x)f(y') = C,$$

C désignant une constante arbitraire, $f(y')$ une fonction de y' seul. En déduire l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$(y-x)y'' + (1+y')(1+y'^2) = 0.$$

II. *Calculer l'intégrale double*

$$\int\int xy\,\frac{\partial^4 f(x,y)}{\partial x^2\,\partial y^2}\,dx\,dy,$$

étendue au rectangle R limité par les droites

$$x = 0, \qquad x = a > 0, \qquad y = 0, \qquad y = b > 0.$$

La fonction $f(x, y)$ est supposée continue, ainsi que toutes *les dérivées qui figurent dans le calcul, à l'intérieur et sur les côtés du rectangle* R.

Solution. — I. Prenons pour variable $u = y - x$ et pour fonction u':

$$u\,\frac{u'\,du'}{du} + F(1 + u') = 0, \qquad u e^{\int \frac{u'\,du'}{F(1+u')}} = \text{const.}$$

Cette intégrale première a la forme voulue

$$(y - x)\, e^{\int \frac{(y'-1)dy'}{F(y')}} = \text{const.}$$

Dans l'exemple, on a

$$\frac{y' - 1}{(y' + 1)(y'^2 + 1)} = -\frac{1}{y' + 1} + \frac{y'}{y'^2 + 1}.$$

Par suite, il vient

$$(y - x)\,\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{1 + y'} = \text{const.}$$

II. On reconnaît de suite que l'intégrale considérée s'écrit sous la forme connue

$$\int\!\!\int \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy,$$

en posant

$$\varphi(x, y) = xy\,\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} - x\,\frac{\partial F}{\partial x} - y\,\frac{\partial F}{\partial y} + F,$$

le champ restant le même. D'après un résultat classique, la valeur de l'intégrale est

$$\varphi(a, b) - \varphi(a, 0) - \varphi(0, b) + \varphi(0, 0).$$

Épreuve pratique. — *Calculer l'intégrale double*

$$\int\!\!\int \frac{dx\,dy}{(1 + x^2 + y^2)^2},$$

étendue :

1° *A l'intérieur de la parabole*

$$y^2 = 2x;$$

2° *A l'extérieur de la même parabole.*

Solution. — En passant aux coordonnées polaires, on obtient

$$-\frac{1}{2}\int\int d\left(\frac{1}{1+\rho^2}\right) d\varphi,$$

la frontière étant $\rho_1 = \dfrac{2\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$.

1° Il vient

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{1+\rho_1^2}\right) d\varphi = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(2+t^2)^2},$$

où $t = \tang\varphi$. On calcule $\displaystyle\int \frac{dz}{(1+z^2)^2}$ le long d'un contour formé de l'axe des x et d'un demi-cercle de centre origine, situé au-dessus de Ox, contenant à son intérieur le pôle unique

$$z = i\sqrt{2}$$

de résidu $-\dfrac{i\sqrt{2}}{16}$. Il vient

$$I = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

2° Pour le plan entier, on obtient π. Donc pour l'espace extérieur à la parabole, on a

$$J = \pi\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right).$$

(Octobre 1919.)