NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

R. GOORMAGHTIGH

Sur les tangentes aux trajectoires des sommets d'un triangle qui se déforme dans un plan

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 20 (1920), p. 100-102

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1920_4_20__100_1>

[O¹2b]

SUR LES TANGENTES AUX TRAJECTOIRES DES SOMMETS D'UN TRIANGLE QUI SE DÉFORME DANS UN PLAN;

PAR M. R. GOORMAGHTIGH.

Soient ABC, A'B'C' deux triangles quelconques et a, b, c les points d'intersection de leurs côtés correspondants; désignons par α, β, γ et α', β', γ' les angles

$$(AA', A'B'), \quad (BB', B'C'), \quad (CC', C'A'),$$
$$(AA', A'C'), \quad (BB', B'A'), \quad (CC', C'B').$$

En appliquant la règle de sinus aux triangles $AA'b$, $AA'c$, ... et en multipliant les relations obtenues, on trouve [1]

$$(1) \qquad \frac{\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{\sin\alpha' \sin\beta' \sin\gamma'} \times \frac{\overline{Ab}.\overline{Bc}.\overline{Ca}}{\overline{Ac}.\overline{Ba}.\overline{Cb}} = 1.$$

En supposant le rapport des produits de segments du premier membre égal à -1, on voit que le rapport des produits de sinus est aussi égal à -1 : lorsque les points a, b, c sont collinéaires, les droites AA', BB', CC' sont donc concourantes; c'est le théorème classique concernant les triangles homologiques.

En considérant, d'autre part, le cas où le rapport des produits de segments qui figure au premier membre de la relation (1) est égal à l'unité, on trouve le théorème suivant :

Si les points d'intersection des côtés correspondants de deux triangles forment un triangle homologique avec l'un d'eux, les côtés de l'autre rencontrent, en trois points collinéaires, les droites qui joignent les sommets correspondants de ces deux triangles.

Il suffit maintenant d'appliquer cette proposition à deux positions infiniment voisines d'un triangle qui se déforme dans le plan pour obtenir ce théorème :

Si un triangle se déforme en restant homologique avec le triangle formé par les points de contact de ses côtés avec leurs enveloppes, les tan-

---

[1] On tient compte des signes des angles et des segments.

gentes aux sommets du triangle aux trajectoires de ces sommets coupent les côtés correspondants en trois points collinéaires.

En particulier, cette propriété est applicable lorsque le triangle donné reste circonscrit à une conique fixe; de même, si un triangle reste inscrit à une conique, il est constamment homologique avec le triangle formé par les points de contact de ses côtés avec leurs enveloppes.

On peut également énoncer le théorème général sous la forme suivante :

Si une conique variable reste tangente à trois courbes données, le triangle des points de contact reste homologique avec le triangle formé par les points de contact de ses côtés avec leurs enveloppes.

En particulier :

Lorsqu'un point décrit une courbe plane quelconque, son triangle pédal, par rapport à un triangle fixe, reste homologique avec le triangle formé par les points de contact des côtés de ce triangle pédal avec leurs enveloppes.

De même :

Lorsqu'un point décrit une courbe plane quelconque, le triangle formé par les pieds des normales abaissées de ce point sur une hypocycloïde à trois rebroussements donnée reste homologique avec le triangle des points de contact de ses côtés avec leurs enveloppes.