NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CL. SERVAIS

Sur les surfaces tétraédrales symétriques

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 19 (1919), p. 456-468

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__456_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1919, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

[O¹6s]

SUR LES SURFACES TÉTRAÉDRALES SYMÉTRIQUES;

PAR M. CL. SERVAIS.
Professeur à l'Université de Gand.

1. On désigne par $A_1B_1C_1D_1$ le tétraèdre de référence de la surface tétraédrale symétrique

$$Ax^m + By^m + Cz^m + Du^m = 0,$$

par M, μ un point de la surface et le plan tangent correspondant. Les tangentes asymptotiques m, m_1 au point M sont des génératrices de la quadrique polaire de M; cette quadrique (Q) est conjuguée au tétraèdre $A_1B_1C_1D_1$ et deux tangentes conjuguées appartiennent à un même complexe tétraédral dont $A_1B_1C_1D_1$ est le tétraèdre fondamental. Les couples de tangentes conjuguées au point M forment une involution ayant pour éléments doubles les droites m, m_1. Le cône (M) du complexe tétraédral, déterminé par le rayon m, est donc tangent au plan μ le long de m. Par

suite, *les tangentes à une ligne asymptotique* (θ) *de la surface tétraédrale symétrique* Σ_m *appartiennent à un même complexe tétraédral* (1).

2. On considère la cubique gauche (G) circonscrite au tétraèdre $A_1B_1C_1D_1$ et tangente au point M à la courbe (θ). Les courbes (θ) et (G) ont même plan osculateur μ au point M. Si ρ et $\mathfrak{T}$, ρ_1 et $\mathfrak{T}_1$ sont les rayons de courbure et de torsion au point M des courbes (θ) et (G), on a (2)

$$4\frac{\rho_1}{\rho} - 3\frac{\mathfrak{T}_1}{\mathfrak{T}} = 1. \tag{1}$$

La tangente m au point M de la cubique (G) rencontre les faces $B_1C_1D_1, A_1C_1D_1$ du tétraèdre $A_1B_1C_1D_1$ aux points A, B. On désigne par α, β les plans mA_1, mB_1 : par a, b les traces des plans MA_1C_1, MB_1C_1 sur le plan osculateur μ. On a (3)

$$\rho_1 = -\frac{1}{2}\frac{MA.MB}{AB}\frac{\sin(ab)}{\sin(ma).\sin(mb)}, \tag{2}$$

$$\mathfrak{T}_1 = -\frac{1}{3}\frac{MA.MB}{AB}\frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\mu\alpha).\sin(\mu\beta)}. \tag{3}$$

3. Les plans $\alpha \equiv mA_1$, $\beta \equiv mB_1$ sont tangents à la quadrique (Q) aux points A, B de la génératrice m. Si R'_1, R' désignent les rayons de courbure principaux

(1) Sophus Lie, *Ueber Complexe mit An Anwendung auf die Theorie partieller Differentiel-Gleichungen* (*Math. Ann.*, t. V).

(2) A. Demoulin, *Sur les courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe* (*Comptes rendus*, Paris, 17 mai 1897).

(3) C. Servais, *Sur la courbure des coniques et des cubiques gauches* (*Mémoires de l'Académie royale de Belgique*, t. I, 1906, in-8°).

au point M de la quadrique (Q), on a (¹)

$$(4) \qquad R'_1 R'_2 = - \frac{\overline{MA}^2 . \overline{MB}^2}{\overline{AB}^2} \frac{\sin^2(\alpha\beta)}{\sin^2(\mu\alpha).\sin^2(\mu\beta)}.$$

D'ailleurs, si R_1, R_2 désignent les rayons de courbure principaux de surface tétraédrale au point M, on a

$$(5) \qquad (m-1)^2 R_1 R_2 = R'_1 R'_2,$$

$$(6) \qquad \mathfrak{G} = \sqrt{-R_1 R_2}.$$

Des égalités (3), (4), (5), (6) on déduit

$$(7) \qquad \mathfrak{G} = \pm \frac{3}{m-1} \mathfrak{G}_1.$$

4. Dans le cas de la surface tétraédrale du troisième ordre,

$$A x^{-1} + B y^{-1} + C z^{-1} + D u^{-1} = 0,$$

la cubique gauche (G) appartient à la surface.

On a donc (Darboux, *Théorie générale des surfaces*, t. II, p. 398) :

$$(8) \qquad \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{G}_1} - 3 = -2 \frac{\rho_1}{\rho}.$$

Les équations (1) et (8) ont pour systèmes de solutions

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \frac{4}{3}, \qquad \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{G}_1} = \frac{3}{2}, \qquad \frac{\rho}{\rho_1} = 1, \qquad \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{G}_1} = 1.$$

5. La relation (7) montre que pour une ligne asymptotique (θ) de la surface tétraédrale du troisième ordre la valeur du rapport $\mathfrak{G} : \mathfrak{G}_1$ est égale à $\frac{3}{2}$. Pour la sur-

(¹) C. Servais, *Sur la courbure et la torsion dans la collinéation et la réciprocité* (*Mémoires de l'Académie royale de Belgique*, 1898, in-8°).

face Σ_m, on a donc

$$\mathfrak{T} = \frac{3}{1-m}\,\mathfrak{T}_1. \tag{9}$$

Des égalités (1) et (9) on déduit

$$\rho = \frac{4}{2-m}\,\rho_1. \tag{10}$$

Ainsi : *Un point* M *étant pris arbitrairement sur la ligne asymptotique* (θ) *d'une surface tétraédrale symétrique* Σ_m, *on considère la cubique gauche* (G) *tangente en* M *à la courbe* (θ) *et circonscrite au tétraèdre relatif à cette surface.*

1° *Le rapport des rayons de courbure* ρ *et* ρ_1 *des courbes* (θ) *et* (G) *au point* M *est en grandeur et en signe égal à*

$$\frac{4}{2-m}.$$

2° *Le rapport des rayons de torsion* $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}_1$ *des courbes* (θ) *et* (G) *au point* M *est en grandeur et en signe égal à*

$$\frac{3}{1-m}.$$

6. Des formules (2), (3), (9), (10) on déduit

$$\rho = \frac{2}{m-2}\,\frac{\mathrm{MA}.\mathrm{MB}}{\mathrm{AB}}\,\frac{\sin(ab)}{\sin(ma)\sin(mb)},$$

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{m-1}\,\frac{\mathrm{MA}.\mathrm{MB}}{\mathrm{AB}}\,\frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\mu\alpha).\sin(\mu\beta)},$$

formules qui déterminent les rayons de courbure et de torsion de la ligne asymptotique (θ) de la surface tétraédrale Σ_m en fonction d'éléments déterminés par le point M, la tangente m et le tétraèdre de symétrie.

7. *Une tangente asymptotique* m *au point* M *de*

la surface tétraédrale Σ_m *rencontre les faces du tétraèdre de symétrie* $A_1B_1C_1D_1$ *aux points* A, B, C, D. *L'homologue du point* M *dans l'involution* (AB, CD) *est situé sur la droite joignant les traces des arêtes opposées* A_1B_1, C_1D_1 *sur le plan tangent en* M *à la surface.*

En effet, la conique (μ) du complexe (T) (1) située dans le plan μ est tangente en M à la droite m et inscrite dans le quadrilatère *abcd* section du tétraèdre $A_1B_1C_1D_1$ par le plan μ. Les tangentes a et b, c et d définissent sur la conique (μ) une involution (I); en désignant par m' la conjuguée de m dans cette involution, les trois points ab, cd, $K \equiv mm'$ sont collinéaires. L'involution (I) détermine sur la droite m l'involution (AB, CD, MK).

8. *Si* m *et* μ *sont respectivement une tangente asymptotique et le plan tangent en un point* M *d'une surface tétraédrale* Σ_m, *le conjugué du plan* μ *dans l'involution définie par les couples de plans projetant de* m *les sommets* A_1 *et* B_1, C_1 *et* D_1 *du tétraèdre de symétrie coupe les arêtes opposées* A_1B_1, C_1D_1 *en deux points alignés sur le point* M.

En effet le cône (M) du complexe (T) est tangent au plan μ le long de la droite m. Les génératrices MA_1 et MB_1, MC_1 et MD_1 définissent sur le cône (M) une involution (I) dont le rayon polaire r s'appuie sur les droites A_1B_1, C_1D_1; le plan mr est l'homologue de μ dans l'involution projetant de m l'involution (I).

9. La tangente au point $M(x_1, y_1, z_1, u_1)$ de la courbe tétraédrale symétrique (C_m)

$$Ax^m + By^m + Cz^m + Du^m = 0.$$
$$A'x^m + B'y^m + C'z^m + D'u^m = 0$$

est l'axe du faisceau des plans tangents aux quadriques du faisceau

$$(A - kA')x_1^{m-2}x^2 + (B - kB')y_1^{m-2}y^2 + (C - kC')z_1^{m-2}z^2 + (D - kD')u_1^{m-2}u^2 = 0.$$

Cette droite m est une génératrice de la quadrique (Q_1) définie par une valeur k_1 convenablement choisie du paramètre k, et par suite m est une tangente asymptotique de la surface tétraédrale Σ_m représentée par l'équation

$$(A - k_1A')x^m + (B - k_1B')y^m + (C - k_1C')z^m + (D - k_1D')u^m = 0.$$

Le plan tangent en M à Σ_m est osculateur à la courbe (C_m) située sur Σ_m; sinon la courbure de cette courbe en un quelconque M de ses points serait nulle. Mais le plan est tangent au cône (M) du complexe tétraédral défini par le rayon m (1); donc :

Les tangentes à une courbe tétraédrale symétrique (C_m) *appartiennent à un même complexe tétraédral dont le tétraèdre fondamental coïncide avec le tétraèdre de symétrie de la courbe* (1).

La tangente m coupe la face $A_1B_1C_1$ du tétraèdre de symétrie $A_1B_1C_1D_1$ au point

$$x_2 = (BC')y_1^{m-1}z_1^{m-1}, \qquad y_2 = (CA')x_1^{m-1}z_1^{m-1},$$
$$z_2 = (AB')x_1^{m-1}y_1^{m-1}.$$

En exprimant que ce point appartient à la quadrique (Q_1), on détermine la valeur k_1 du paramètre k,

$$k_1 = \frac{A(BC')^2y_1^mz_1^m + B(CA')^2x_1^mz_1^m + C(AB')^2x_1^my_1^m}{A'(BC')^2y_1^mz_1^m + B'(CA')^2x_1^mz_1^m + C'(AB')^2x_1^my_1^m}.$$

(1) A. Demoulin, *Sur les courbes tétraédrales symétriques* (*Comptes rendus*, Paris, 1er avril 1892).

En désignant par Δ le dénominateur de k_1, on a

$$\Delta(A - k_1 A') = -(AB')(AC')(AD')x_1^m u_1^m,$$
$$\Delta(B - k_1 B') = -(BA')(BC')(BD')y_1^m u_1^m,$$
$$\Delta(C - k_1 C') = -(CA')(CB')(CD')z_1^m u_1^m,$$
$$\Delta(D - k_1 D') = -(DA')(DB')(DC')u_1^m u_1^m.$$

Il résulte de ces valeurs que les coordonnées du pôle du plan osculateur μ relativement à la quadrique

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 0$$

sont données par les égalités

$$X_1 = (AB')(AC')(AD')x_1^{2m-1}, \qquad Y_1 = (BA')(BC')(BD')y_1^{2m-1},$$
$$Z_1 = (CA')(CB')(CD')z_1^{2m-1}, \qquad U_1 = (DA')(DB')(DC')u_1^{2m-1}.$$

Par suite, les équations de la polaire réciproque $(C'_{m'})$ de la courbe (C_m) sont :

$$A_1 x^{m'} + B_1 y^{m'} + C_1 z^{m'} + D' u^{m'} = 0,$$
$$A'_1 x^{m'} + B'_1 y^{m'} + C'_1 z^{m'} + D'_1 u^{m'} = 0,$$

en posant

$$A_1 = A : [(AB')(AC')(AD')]^{\frac{m}{2m-1}},$$
$$A'_1 = A' : [(AB')(AC')(AD')]^{\frac{m}{2m-1}},$$
$$B_1 = B : [(BA')(BC')(BD')]^{\frac{m}{2m-1}},$$
$$B'_1 = B' : [(BA')(BC')(BD')]^{\frac{m}{2m-1}},$$
$$C_1 = C : [(CA')(CB')(CD')]^{\frac{m}{2m-1}},$$
$$C'_1 = C' : [(CA')(CB')(CD')]^{\frac{m}{2m-1}},$$
$$D_1 = D : [(DA')(DB')(DC')]^{\frac{m}{2m-1}},$$
$$D'_1 = D' : [(DA')(DB')(DC')]^{\frac{m}{2m-1}},$$

$$m' = \frac{m}{2m-1}.$$

Ainsi : *La polaire réciproque* (C'_m) *d'une courbe*

tétraédrale symétrique (C_m) *est une courbe tétraédrale symétrique. Les exposants m et m' relatifs à ces deux courbes sont liés par la relation*

$$2mm' = m + m'.$$

10. Si l'on désigne par ρ_2 et $\mathfrak{T}_2$, ρ et $\mathfrak{T}$ les rayons de courbure et de torsion au point de contact M de la courbe tétraédrale (C_m) et d'une ligne asymptotique de la surface $\Sigma_m(9)$, on a (DARBOUX, *Théorie générale des surfaces*, t. II, p. 398)

$$\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{T}_2} - 3 = -2\frac{\rho_2}{\rho}. \tag{11}$$

Les égalités (9), (10), (11) donnent

$$\frac{3}{1-m}\frac{\mathfrak{T}_1}{\mathfrak{T}_2} - 3 = -\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{2-m}{2}. \tag{12}$$

On a aussi (2)

$$4\frac{\rho_1}{\rho_2} - 3\frac{\mathfrak{T}_1}{\mathfrak{T}_2} = 1. \tag{13}$$

Les équations (12) et (13) ont pour systèmes de solutions

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{2}{1-m}, \qquad \frac{\mathfrak{T}_2}{\mathfrak{T}_1} = \frac{3}{1-2m},$$
$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{4}{2-m}, \qquad \frac{\mathfrak{T}_2}{\mathfrak{T}_1} = \frac{3}{1-m}.$$

Dans le cas de la cubique gauche :

$$Ax^{-1} + By^{-1} + Cz^{-1} + Du^{-1} = 0,$$
$$A'x^{-1} + B'y^{-1} + C'z^{-1} + D'u^{-1} = 0,$$

on a nécessairement $\rho_2 = \rho_1$, $\mathfrak{T}_2 = \mathfrak{T}_1$, donc dans le cas général on a

$$\rho_2 = \frac{2}{1-m}\rho_1, \qquad \mathfrak{T}_2 = \frac{3}{1-2m}\mathfrak{T}_1. \tag{14}$$

Ainsi : *Un point* M *étant pris arbitrairement sur la courbe tétraédrale symétrique* (C_m), *on considère la cubique gauche* (G) *tangente en* M *à la courbe* (C_m) *et passant par les sommets du tétraèdre de symétrie.*

1° *Le rapport des rayons de courbure* ρ_2 *et* ρ_1 *au point* M *de la courbe tétraédrale* (C_m) *et de la cubique* (G) *est égal à* (1)

$$\frac{2}{1-m}.$$

2° *Le rapport des rayons de torsion* $\mathfrak{T}_2$ *et* $\mathfrak{T}_1$ *au point* M *de la courbe* (C_m) *et de la cubique* (G) *est égal à* (2)

$$\frac{3}{1-2m}.$$

11. On déduit des équations (2), (3), (14) que :

Les rayons de courbure et de torsion au point M *d'une courbe tétraédrale symétrique sont donnés par les formules*

$$\rho = \frac{1}{m-1}\,\frac{MA.MB}{AB}\,\frac{\sin(ab)}{\sin(ma).\sin(mb)},$$

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2m-1}\,\frac{MA.MB}{AB}\,\frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\mu\alpha).\sin(\mu\beta)};$$

A, B *sont les traces de la tangente m au point* M *sur les faces* $B_1C_1D_1$, $A_1C_1D_1$ *du tétraèdre de symétrie* $A_1B_1C_1D_1$ *de la courbe tétraédrale; a, b les traces des plans* MA_1C_1, MB_1C_1 *sur le plan osculateur* μ; α, β *les plans* mA_1, mB_1.

---

(1) V. Jamet, *Sur les surfaces et les courbes tétraédrales symétriques* (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 1887).

(2) A. Demoulin, *Sur les courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe* (*Comptes rendus*, Paris, 17 mai 1897).

12. *La tangente m au point* M *d'une courbe tétraédrale symétrique* (C) *rencontre les faces du tétraèdre de symétrie* $A_1B_1C_1D_1$ *aux points* A, B, C, D. *L'homologue du point* M *dans l'involution* (AB, CD) *est situé sur la droite joignant les traces des arêtes opposées* A_1B_1, C_1D_1, *sur le plan osculateur* μ *au point* M.

Le conjugué du plan osculateur μ *dans l'involution définie par les couples de plans projetant de la tangente m les couples de sommets* A_1 *et* B_1, C_1 *et* D_1 *du tétraèdre de symétrie* $A_1B_1C_1D_1$ *coupe les arêtes opposées* A_1B_1, C_1D_1 *en deux points alignés sur le point* M.

Les démonstrations sont identiques à celles des n^{os} 7 et 8.

La première propriété donne la construction du plan osculateur μ en un point donné M de la courbe tétraédrale symétrique (C).

13. *Un point* M *étant pris arbitrairement sur la ligne asymptotique* (θ) *d'une surface tétraédrale symétrique* Σ_m *d'ordre m, on considère la courbe tétraédrale symétrique* (C) *tangente en ce point à la courbe* (θ), *ayant pour tétraèdre de symétrie celui de la surface* Σ_m *et pour exposant* $\frac{m}{2}$.

Les courbures et les torsions des deux courbes au point M *sont égales et de même signe.*

Car on a successivement pour les courbes (θ) et (C)

$$\rho = \frac{4}{2-m}\rho_1, \qquad \rho' = \frac{2}{1-\frac{m}{2}}\rho_1,$$

$$\mathfrak{T} = \frac{3}{1-m}\mathfrak{T}_1, \qquad \mathfrak{T}' = \frac{3}{1-2\frac{m}{2}}\mathfrak{T}_1,$$

ρ' et $\mathfrak{T}'$ étant les rayons de courbure et de torsion au point M de la courbe (C). On a donc

$$\rho = \rho', \qquad \mathfrak{T} = \mathfrak{T}'.$$

14. Les arêtes opposées A_1B_1, C_1D_1 du tétraèdre fondamental d'un complexe tétraédral (T) étant conjuguées dans un complexe linéaire (Δ), l'arête de rebroussement (C) d'une développable quelconque de la congruence [(T), (Δ)] jouit de la propriété suivante :

Un point M *étant pris arbitrairement sur la courbe* (C), *on considère la cubique gauche* (G) *tangente au point* M *à la courbe* (C) *et circonscrite au tétraèdre* $A_1B_1C_1D_1$.

Si ρ *et* ρ_1, $\mathfrak{T}$ *et* $\mathfrak{T}_1$ *sont les rayons de courbure et de torsion des courbes* (C) *et* (G) *au point* M, *on a*

$$\rho = 2\rho_1, \qquad \mathfrak{T} = 3\mathfrak{T}_1,$$

en grandeur et en signe.

En effet, en utilisant les notations (2), les plans β et α sont respectivement les plans focaux des points A et B dans le complexe linéaire Δ. Les tangentes à la courbe (C) appartiennent à ce complexe. On a donc (1)

$$\mathfrak{T} = -\frac{MA.MB}{AB}\,\frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\mu\alpha).\sin(\mu\beta)}. \tag{15}$$

Les égalités (3) et (15) donnent

$$\mathfrak{T} = 3\mathfrak{T}_1. \tag{16}$$

Les tangentes à la courbe (C) appartiennent au complexe tétraédral (T); l'égalité (1) qui lui est applicable, combinée avec l'égalité (16), conduit à la relation

$$\rho = 2\rho_1.$$

(1) Cette formule est démontrée au n° 16.

Corollaire. — Le rayon de courbure de la courbe (C) au point M est donné par la formule

$$\rho = -\frac{MA.MB}{AB}\,\frac{\sin(ab)}{\sin(ma).\sin(mb)}.$$

15. *La propriété* (10)

$$\mathfrak{C}_2 = \frac{3}{1-2m}\,\mathfrak{C}_1,$$

due à M. A. Demoulin, *peut se déduire par la théorie des polaires réciproques de la propriété*

$$\rho_2 = \frac{2}{1-m}\,\rho_1,$$

due à M. V. Jamet.

Les polaires réciproques $(C'_{m'})$ et (G') des courbes (C_m) et (G) (10), relativement à la quadrique

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 0,$$

sont tangentes au point M_1 correspondant de M. On désigne par ρ'_2 et ρ'_1 les rayons de courbure des courbes $(C'_{m'})$ et (G') au point M_1; on a (1)

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\rho'_2}{\rho'_1}\,\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{C}_1}. \tag{17}$$

La cubique (G') est osculatrice aux faces du tétraèdre de symétrie $A_1B_1C_1D_1$; si l'on désigne par ρ''_1 le rayon de courbure de la cubique tangente en M_1 à la cubique (G') et circonscrite à ce tétraèdre, on a

$$\rho'_1 = 3\rho''_1. \tag{18}$$

et, d'après la propriété de M. Jamet,

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{2}{1-m}, \qquad \frac{\rho'_2}{\rho''_1} = \frac{2}{1-m'}. \tag{19}$$

---

(1) C. Servais, *Sur la courbure et la torsion dans la collinéation et la réciprocite*, p. 29.

On a d'ailleurs (9)

$$2mm' = m + m'. \tag{20}$$

Les égalités (17), (18), (19), (20) donnent

$$\mathfrak{C}_2 = \frac{3}{1-2m}\,\mathfrak{C}_1.$$

Une remarque analogue est applicable aux propriétés (5) et (14).

16. Soient M, M′ deux points infiniment voisins d'une courbe (C) dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire; A′, B′ deux points de la droite MM′; μ, μ' les plans osculateurs aux points M, M′; α', β' les plans focaux des points A′, B′. On a

$$(MA'M'B') = (\mu\alpha'\mu'\beta'),$$

par suite

$$\lim\frac{MM'}{\sin\mu\mu'} = \lim\frac{M'A'.MB'}{A'B'}\,\frac{\sin(\alpha'\beta')}{\sin(\mu'\alpha')\sin(\mu\beta')}$$

ou

$$\mathfrak{C} = \frac{MA.MB}{AB}\,\frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\mu\alpha).\sin(\mu\beta)}.$$

A et B sont deux points de la tangente au point M; α et β leurs plans focaux respectifs.