

FRANÇOIS GIRAULT

Sur le cercle de Miquel

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 19
(1919), p. 452-456

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__452_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1919, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[K'9a]

SUR LE CERCLE DE MIQUEL;

PAR M. FRANÇOIS GIRAULT.

I. Étant données cinq droites, les foyers des cinq paraboles inscrites aux quadrilatères formés par ces cinq droites, prises quatre à quatre, sont, comme l'on sait, sur un cercle, dit *cercle de Miquel* du pentagone des cinq droites. Ce cercle est le lieu des foyers des *monofocales* de troisième classe inscrites au pentagone ⁽¹⁾.

Le cercle de Miquel d'un pentagone est le lieu des points M tels que la conique qui passe par les projections de M sur les côtés du pentagone passe aussi en M.

On reconnaît en effet immédiatement que la podaire d'une monofocale de troisième classe par rapport à son foyer est une conique passant en ce point. Réciproquement, l'antipodaire d'une conique par rapport à l'un de ses points est une monofocale de troisième classe ayant son foyer au point considéré. Le lieu visé dans l'énoncé se confond avec celui des monofocales de troisième classe inscrites au pentagone, c'est-à-dire avec le cercle de Miquel de celui-ci.

II. On peut reconnaître l'existence de cinq cercles

⁽¹⁾ Voir l'article de M. HENRI LEBESGUE, *Sur deux théorèmes de Miquel et de Chifford* (N. A., 1916, p. 481).

remarquables passant tous par un même point du cercle de Miquel d'un pentagone.

Cherchons, en effet, un quadrilatère étant donné, *quel est le lieu des points M tels que la conique qui passe par les projections de M sur les côtés du quadrilatère et par M soit une hyperbole équilatère H.*

L'antipodaire de H par rapport à M est, d'après la remarque faite ci-dessus, une monofocale de troisième classe G, ayant son foyer en M.

Les directions asymptotiques de G sont évidemment perpendiculaires aux directions asymptotiques de H, c'est-à-dire qu'elles sont rectangulaires. Le lieu cherché est donc celui des foyers des monofocales inscrites au quadrilatère donné, et telles que leurs directions asymptotiques soient rectangulaires.

Ce lieu est un cercle. En effet, I et J étant les points cycliques, il existe une infinité simple de monofocales de troisième classe inscrites au quadrilatère et tangentes à une droite isotrope donnée IM. Une telle monofocale est déterminée d'une façon unique, si l'on se donne l'un de ses points de contact avec la droite de l'infini, et l'autre point de contact est aussi déterminé d'une façon unique. Ces deux points de contact sont donc en relation homographique (et visiblement involutive) sur la droite de l'infini. Si l'on veut, en outre, que la monofocale ait ses directions asymptotiques rectangulaires, il faut que ces deux points de contact se correspondent dans l'involution qui admet I et J pour points doubles. Deux involutions sur une même droite n'ayant qu'un couple commun, on voit qu'il existe une seule monofocale de troisième classe, à directions asymptotiques rectangulaires, inscrite au quadrilatère et tangente à IM. On conclut immédia-

tement de là qu'il existe une correspondance homographique entre IM et JM, d'où il résulte que le lieu des foyers des monofocales envisagées est bien un cercle Γ .

Le cercle Γ passe par le foyer F de la parabole inscrite au quadrilatère : en effet, les projections de ce point sur les côtés étant en ligne droite, il existe une hyperbole équilatère (composée de deux droites rectangulaires) passant par ces points et par le point F.

Le cercle Γ passe aussi par les centres des cercles circonscrits aux quatre triangles formés avec les côtés du quadrilatère, pris trois à trois. En effet, l'un de ces centres est l'orthocentre du triangle qui a pour sommets ses projections sur les côtés du triangle correspondant. Donc toute conique passant par ce centre et ces projections, en particulier celle qui passe aussi par la projection du même centre sur le quatrième côté du quadrilatère, est bien une hyperbole équilatère.

Je dirai que Γ est *le cercle des centres* du quadrilatère.

III. Considérons alors un pentagone, de côtés 1, 2, 3, 4, 5. Soient Γ_{1234} et Γ_{1235} les cercles des centres des deux quadrilatères (1, 2, 3, 4) et (1, 2, 3, 5). Ils ont en commun le centre du cercle circonscrit au triangle (1, 2, 3) et un autre point P, qui est tel qu'il existe une hyperbole équilatère passant par P et par les projections de ce point sur les cinq côtés du pentagone. P est donc sur le cercle de Miquel du pentagone (n° I), et l'on voit ainsi que P appartient encore aux cercles Γ_{1245} , Γ_{1345} , Γ_{2345} (1).

(1) On peut être conduit à se demander si, par analogie avec le théorème de Clifford, les six points P relatifs aux pentagones formés par les six côtés d'un hexagone, puis cinq à cinq, ne seraient pas sur un même cercle. J'ai reconnu, par l'examen d'un cas particulier, qu'il n'en est rien.

Ainsi, les cinq cercles des centres des quadrilatères obtenus en prenant quatre à quatre les côtés d'un pentagone se coupent en un point du cercle de Miquel de ce pentagone.

IV. On peut énoncer le corollaire suivant des propositions précédentes :

Étant donnés un triangle ABC et un point P, soient α , β , γ les symétriques de P par rapport aux côtés de ce triangle. Les cercles BC α , CA β et AB γ se coupent en un point du cercle $\alpha\beta\gamma$.

Soient, en effet, Γ_a , Γ_b , Γ_c les trois cercles qui passent en P et qui ont pour centres respectifs A, B, C. Ces cercles se coupent deux à deux, indépendamment du point P, en α , β , γ . Menons par P deux droites quelconques 1 et 2. On reconnaît immédiatement, en faisant la figure, qu'il existe trois droites 3, 4 et 5 telles que les cercles Γ_a , Γ_b , Γ_c soient circonscrits respectivement aux triangles (1, 2, 3), (1, 2, 4) et (1, 2, 5).

Les points α , β , γ sont les foyers respectifs des paraboles inscrites aux quadrilatères (1, 2, 4, 5), (1, 2, 3, 5), (1, 2, 3, 4). Ce cercle $\alpha\beta\gamma$ est donc le cercle de Miquel du pentagone (1, 2, 3, 4, 5). D'autre part, le cercle BC α , par exemple, passant par les centres des cercles circonscrits aux triangles (1, 2, 4) et (1, 2, 5) et par le foyer de la parabole inscrite au quadrilatère (1, 2, 4, 5), est le cercle des centres de ce quadrilatère. On a des faits analogues pour les cercles CA β et AB γ , et l'on en conclut le théorème énoncé.

On peut ajouter que les quatre cercles A $\beta\gamma$, B $\gamma\alpha$, C $\alpha\beta$, ABC passent par un même point. On a, en effet, le théorème général suivant :

Étant donnés six points A, B, C, α , β , γ , si les

quatre cercles $\alpha\beta\gamma$, $BC\alpha$, $CA\beta$, $AB\gamma$ passent par un même point, il en est de même des quatre cercles ABC , $A\beta\gamma$, $B\gamma\alpha$, $C\alpha\beta$.

En faisant une inversion par rapport au point de concours des quatre premiers cercles, on reconnaît, en effet, que cela revient au théorème classique sur le concours des quatre cercles circonscrits aux triangles formés par les côtés d'un quadrilatère.