

PIERRE HUMBERT

Sur les équations de Didon

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 19
(1919), p. 443-451

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__443_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1919, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[H4a]

SUR LES ÉQUATIONS DE DIDON;

PAR M. PIERRE HUMBERT,

Maitre de Conférences

à la Faculté des Sciences de Montpellier.

1. Soit une fonction $z(x)$ vérifiant une équation différentielle E_1 , linéaire, homogène, et d'ordre p ,

$$(E_1) \quad A_p \frac{d^p z}{dx^p} + A_{p-1} \frac{d^{p-1} z}{dx^{p-1}} + \dots + A_1 \frac{dz}{dx} + A_0 z = 0,$$

où les A sont des fonctions de x . Il est clair que la fonction

$$y(x) = \frac{d^n z}{dx^n},$$

où n est un entier arbitraire, vérifie une équation différentielle du même type, que l'on formera en dérivant 1, 2, ..., n fois par rapport à x le premier membre de E_1 , en éliminant entre ces n équations et l'équation E_1 elle-même les n quantités $z, \frac{dz}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}$, et en remplaçant ensuite dans l'équation E_2 restante les symboles $\frac{d^n z}{dx^n}, \frac{d^{n+1}z}{dx^{n+1}}, \dots, \frac{d^{n+p}z}{dx^{n+p}}$ par $y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^p y}{dx^p}$.

Réciproquement, si une fonction $y(x)$ vérifie une équation E_2 , linéaire, homogène et d'ordre p , on pourra toujours former une équation E_1 du même type, la relation entre E_1 et E_2 étant celle que nous venons de décrire.

Les p intégrales indépendantes $y_1, y_2, \dots, y_p$ de E_2 se déduiront alors des p intégrales indépendantes $z_1, z_2, \dots, z_p$ de E_1 par les relations

$$y_i = \frac{d^n z_i}{dx^n} \quad (i = 1, 2, \dots, p).$$

L'intégration complète de E_2 est ainsi ramenée à celle de E_1 , qu'un choix convenable de l'entier n pourra, dans certains cas, rendre plus simple que E_2 .

2. Considérons en particulier le cas où, dans l'équation E_1 , chaque coefficient A_λ de $\frac{d^\lambda z}{dx^\lambda}$ est un polynôme en x de degré λ , pouvant d'ailleurs s'abaisser à un degré inférieur. L'équation E_2 s'obtient alors très simplement en dérivant n fois, terme à terme, l'équation E_1 , et en remplaçant $\frac{d^n z}{dx^n}$ par y , sans qu'on ait à effectuer d'élimination.

De même, on passe aisément, en suivant la marche inverse, de l'équation E_2 à l'équation E_1 .

Nous dirons, dans ce cas, que E_1 est l'équation de Didon de E_2 , pour la valeur n .

3. Afin de montrer l'intérêt de cette notion, rappelons brièvement quelques cas bien connus, empruntés à la théorie des fonctions sphériques et analogues, où l'on fait usage des principes ci-dessus.

a. Équation des polynomes de Legendre. — L'exemple est classique. Le polynome de Legendre P_n d'ordre n , qui satisfait à l'équation différentielle

$$(x^2 - 1)y'' + 2xy' - n(n+1)y = 0$$

pouvant, comme on le sait, se mettre sous la forme

$$P_n = k \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n;$$

k étant un coefficient constant convenablement choisi, il est clair que l'équation de Didon, pour la valeur n , sera l'équation

$$(x^2 - 1)z' - 2(n-1)xz' - 2nz = 0$$

vérifiée par la fonction $(x^2 - 1)^n$. On en écrit alors immédiatement, par la formule d'Euler, une deuxième solution indépendante

$$q(x) = (x^2 - 1)^n \int_{\infty}^x \frac{du}{(u^2 - 1)^{n+1}};$$

et par conséquent on a deux solutions indépendantes de l'équation de Legendre, la première

$$P_n = k \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

qui est le polynome de Legendre, et la deuxième

$$Q_n = k' \frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2 - 1)^n \int_{-1}^x \frac{du}{(u^2 - 1)^{n+1}} \right]$$

qui est la fonction de Legendre de seconde espèce.

b. Le résultat précédent s'étend sans peine aux équations différentielles qui définissent les fonctions *sphériques adjointes* et les fonctions *toroidales*.

c. L'application du même procédé à l'équation *hypergéométrique* est également bien connue. Darboux, dans son étude sur les polynomes de Jacobi ⁽¹⁾, en a tiré une expression de la fonction de la seconde espèce rattachée à ces polynomes.

d. Signalons aussi, sans insister davantage, les équations différentielles des polynomes de Laguerre et d'Hermite (à une variable), pour lesquelles l'équation de Didon se forme immédiatement.

4. Tous les exemples précédents portent sur des équations du second ordre, dont on connaît déjà une solution : la deuxième intégrale, c'est-à-dire la fonction de seconde espèce, se trouve donc immédiatement par la méthode d'Euler. Le procédé de l'équation de Didon donne, simplement, une seconde expression pour cette fonction : mais, à tout prendre, il ne présente alors qu'un médiocre intérêt. Traitons un cas plus compliqué, où l'équation est du troisième ordre.

Considérons les polynomes d'ordre $2n$ en x , introduits par M. Appell comme généralisation des poly-

⁽¹⁾ *Approximations des fonctions de très grands nombres* (Journ. Math. pures et appl., 1878).

nomes de Legendre (1), et définis par

$$P_{2n}(x) = \frac{d^n}{dx^n} [x^n(1-x^2)^n].$$

Ce polynome vérifie, comme on peut s'en assurer, l'équation différentielle du troisième ordre

$$(1) \quad x(1-x^2)y''' + 2(1-3x^2)y'' + 3(n-1) \\ \times (n+2)xy' + 2n(n+1)(n+2)y = 0.$$

L'intégration complète de cette équation, à notre connaissance, n'a pas encore été faite. Cherchons à obtenir, par la méthode de l'équation de Didon, deux autres solutions. Pour la valeur n , l'équation de Didon est

$$(2) \quad x(1-x^2)z''' + (2-n) \\ \times (1-3x^2)z'' - 6x(1-2n)z' + 6nz = 0.$$

On en tire, en intégrant terme à terme,

$$(3) \quad x(1-x^2)z'' + (1-n)(1-3x^2)z' - 6nxz = 0,$$

et, en intégrant une fois encore,

$$(4) \quad 1(1-x^2)z' - n(1-3x^2)z = 0.$$

L'équation (4) est vérifiée par la fonction

$$z = x^n(1-x^2)^n$$

qui vérifie aussi (3) et, comme il fallait s'y attendre, (2).

L'équation (3) étant du second ordre, rien n'est plus facile que d'en déterminer une seconde solution z_1 , qui sera aussi solution de (2). On trouve tout de suite

$$z_1 = k x^n(1-x^2)^n \int_{\infty}^x \frac{du}{u^{n+1}(1-u^2)^{n+1}},$$

(1) *Archiv Math. Physik*, 3^e série, 1901, p. 70.

d'où l'on tirera une expression pour une solution de (1), c'est-à-dire une fonction de seconde espèce

$$y_1 = k \frac{d^n}{dx^n} \left[x^n (1-x^2)^n \int_x^1 \frac{du}{u^{n+1}(1-u^2)^{n+1}} \right].$$

Voyons sous quelle forme elle se présente. Si n est pair, donc $n+1$ impair, la décomposition en éléments simples de la fraction

$$\frac{1}{u^{n+1}(1-u^2)^{n+1}}$$

donnera des termes en

$$\frac{1}{u^{n+1}}, \quad \frac{1}{u^n}, \quad \dots, \quad \frac{1}{u},$$

$$\frac{1}{(1+u)^{n+1}}, \quad \frac{1}{(1+u)^n}, \quad \dots, \quad \frac{1}{1+u}$$

et

$$\frac{1}{(1-u)^{n+1}}, \quad \frac{1}{(1-u)^n}, \quad \dots, \quad \frac{1}{1-u}.$$

Si α est le coefficient de $\frac{1}{u}$, les coefficients de $\frac{1}{1+u}$ et $\frac{1}{1-u}$ seront $-\frac{\alpha}{2}$ et $+\frac{\alpha}{2}$; en intégrant, on obtiendra donc des termes

$$\frac{1}{x^n}, \quad \dots, \quad \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{(1-x^2)^n}, \quad \dots, \quad \frac{1}{1-x^2}$$

et un terme non algébrique, qui sera

$$\alpha \log \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Donc, avec un choix convenable du coefficient k , on aura

$$z_1 = \frac{1}{2} x^n (1-x^2)^n \log \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \text{polynôme d'ordre } 3n-1$$

et, par conséquent,

$$y_1 = \frac{1}{2} P_{2n}(x) \log \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \text{polynome d'ordre } 2n-1.$$

Si n est impair, $n+1$ sera pair, et il n'y aura pas dans la décomposition de terme en $\frac{1}{u}$. Le terme logarithmique sera alors $\log \frac{1+x}{1-x}$, et l'on aura pour y_1 la forme

$$y_1 = \frac{1}{2} P_{2n}(x) \log \frac{1+x}{1-x} + \text{polynome d'ordre } 2n-1.$$

On voit tout de suite l'analogie de cette fonction de seconde espèce avec la fonction de Legendre.

Cherchons maintenant une troisième solution de l'équation de Didon : c'est chose aisée, puisque nous en connaissons déjà deux ; après une première intégration, nous trouverons, en sous-entendant le coefficient constant,

$$\frac{dz_2}{dx} = n(1-3x^2)(1-x^2)^{n-1} x^{n-1} \int_{\infty}^x \frac{du}{u^{n+2}(1-u^2)^{n+2}}.$$

Sans avoir besoin de remonter à z_2 , nous écrirons immédiatement la fonction y_2 , fonction de troisième espèce, sous la forme

$$y_2 = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left[n(1-3x^2)x^{n-1}(1-x^2)^{n-1} \int_{\infty}^x \frac{du}{u^{n+2}(1-u^2)^{n+2}} \right].$$

L'intégration complète de l'équation des polynomes de M. Appell est ainsi effectuée.

Cette fonction y_2 de troisième espèce a une expression moins simple que la fonction de deuxième espèce :

on verrait en effet que

$$y^2 = \begin{cases} \frac{1}{2} P_{2n}(x) \log \frac{1+x}{1-x} + \text{fonction algébrique de } x \\ \quad (n \text{ pair}), \\ \frac{1}{2} P_{2n}(x) \log \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \text{fonction algébrique de } x \\ \quad (n \text{ impair}); \end{cases}$$

mais la fonction complémentaire est une fraction rationnelle et non plus un polynome entier.

§. La notion d'équation de Didon s'étend sans peine à des systèmes d'équations aux dérivées partielles, et c'est là une importante application de cette théorie. Comme exemple, nous rappellerons l'intégration complète des équations aux dérivées partielles

$$(I) \quad \begin{cases} (1-x^2) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - xy \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + (n-2)x \frac{\partial U}{\partial x} \\ \quad - (m+1)y \frac{\partial U}{\partial y} + (m+n)(m+1)U = 0, \\ (1-y^2) \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - xy \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + (m-2)y \frac{\partial U}{\partial y} \\ \quad - (n+1)x \frac{\partial U}{\partial x} + (m+n)(n+1)U = 0 \end{cases}$$

vérifiées par le polynome d'Hermite

$$U_{m,n}(x, y) = k \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} (1-x^2-y^2)^{m+n},$$

extension à deux variables du polynome de Legendre. C'est F. Didon qui a le premier remarqué que la dérivation m fois par rapport à x et n fois par rapport à y

du système

$$(II) \left\{ \begin{array}{l} (1-x^2) \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - xy \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} \\ \quad + 2(m+n-1)x \frac{\partial P}{\partial x} - y \frac{\partial P}{\partial y} + 2(m+n)P = 0, \\ (1-y^2) \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - xy \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} \\ \quad + 2(m+n-1)y \frac{\partial P}{\partial y} - x \frac{\partial P}{\partial x} + 2(m+n)P = 0 \end{array} \right.$$

faisait précisément retomber sur le système (I). Il a résolu les équations (II) après d'assez longs calculs; M. Appell a effectué récemment la même intégration par une méthode très rapide.

Nous avons donné nous-même (1) l'intégration complète, par ce procédé, du système vérifié par les polynômes d'Hermite déduits d'une exponentielle

$$H_{m,n}(x, y) = (-1)^{m+n} e^{\frac{1}{2}\varphi(x,y)} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} e^{-\frac{1}{2}\varphi(x,y)},$$

où φ est une forme quadratique.

Signalons, comme applications que l'on pourrait faire de la méthode, l'intégration des équations hypergéométriques à deux variables, et du système vérifié par les polynômes

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} [x^{m+n} (1-x^2-y^2)^{m+n}]$$

extensions de ceux que nous avons considérés au n° 4.

(1) *C. R. Acad. Sc.*, t. 167, 1918, p. 522.