

C.-A. LAISANT

Observations sur les triangles rectangles en nombres entiers et les suites de Fibonacci

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 19 (1919), p. 391-397

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__391_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1919, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[H12d][I13b α]

**OBSERVATIONS SUR LES TRIANGLES RECTANGLES
EN NOMBRES ENTIERS ET LES SUITES DE FIBONACCI;**

PAR M. C.-A. LAISANT,

Rédacteur.

1. On sait que les côtés a , b , c d'un triangle rectangle en nombres entiers sont donnés par les

relations

$$a = P^2 - N^2, \quad b = 2PN, \quad c = P^2 + N^2,$$

P et N étant deux entiers quelconques. Si P, N sont premiers entre eux et de parité différente, le triangle (a, b, c) est primitif. S'ils sont de même parité, les trois côtés sont pairs, le triangle est non primitif. On doit toujours avoir $P > N$.

En posant $P - N = M$, $P + N = Q$, on obtient la suite de Fibonacci de quatre termes

$$M, N, P, Q,$$

et par suite

$$a = QM, \quad b = \frac{Q^2 - M^2}{2}, \quad c = \frac{Q^2 + M^2}{2}.$$

De là

$$M^2 = c - b, \quad N^2 = \frac{c - a}{2}, \quad P^2 = \frac{c + a}{2}, \quad Q^2 = c + b.$$

Si, prolongeant la série, et formant les groupes successifs de quatre termes (MNPQ), (NPQR), ..., on en déduit les triangles correspondants, on en aura une suite indéfinie, dans laquelle deux sur trois seront primitifs, le troisième ayant ses côtés pairs, puisque sur trois termes consécutifs de la suite indéfinie MNPQ, ..., il y en a toujours un qui est pair.

Nous pouvons facilement, qu'ils soient tous deux primitifs ou non, établir entre deux triangles consécutifs des relations qui se déduisent immédiatement de celles qui précèdent. Soit en effet (a' , b' , c') le triangle qui correspond à la suite NPQR.

Nous aurons

$$N^2 = c' - b', \quad P^2 = \frac{c' - a'}{2}, \quad Q^2 = \frac{c' + a'}{2}.$$

Donc

$$c' - b' = \frac{c - a}{2}, \quad c' - a' = c + a, \quad \frac{c' + a'}{2} = c + b,$$

ce qui donne

$$a' = b + \frac{c - a}{2}, \quad b' = a + b + c, \quad c' = b + \frac{3c + a}{2},$$

et de là

$$\frac{b'}{2} - a' = a - \frac{b}{2}.$$

La différence $a - \frac{b}{2}$ reste donc constante, au signe près; et, par conséquent, les triangles successifs, dont les côtés augmentent indéfiniment, sont tels que le rapport de b à a tend vers 2, quelle que soit la suite MNPQ qui a été employée pour la formation du premier triangle. C'est ce que nous pouvons facilement vérifier sur la suite 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., qui nous donne le Tableau ci-dessous :

M.	N.	P.	Q.	a.	b.	c.
1	1	2	3	3	4	5
1	2	3	5	5	12	13
2	3	5	8	16	30	34
3	5	8	13	39	80	89
5	8	13	21	105	208	233
8	13	21	34	272	546	610
13	21	34	55	715	1428	1597
21	34	55	89	1869	3740	4181
.....						

On peut comparer les valeurs de Q de rangs pairs (5, 13, 34...) avec les valeurs successives des hypoténuses C.

2. A la suite MNPQ, substituons celle-ci après, où les deux premiers éléments M, N. sont permutés :

NMPQ. Si (a, b, c) (a', b', c') sont les triangles respectifs correspondants, nous avons

$$M^2 = c - b = \frac{c' - a'}{2}, \quad N^2 = \frac{c - a}{2} = c' - b',$$

$$P^2 = \frac{c + a}{2} = \frac{c' + a'}{2}.$$

De là

$$a' = \frac{a + 2b - c}{2}, \quad b' = a - b + c, \quad c' = \frac{a - 2b + 3c}{2},$$

ou

$$a' = b - \frac{c - a}{2}, \quad b' = c + a - b, \quad c' = \frac{a + 3c}{2} - b,$$

et les formules réciproques

$$a = b' - \frac{c' - a'}{2}, \quad b = c' + a' - b', \quad c = \frac{a' + 3c'}{2} - b'.$$

Sur les deux groupes $(3, 7, 10, 17)$ et $(7, 3, 10, 13)$ qui donnent respectivement

$$\begin{aligned} a &= 51, & b &= 140, & c &= 149, \\ a' &= 91, & b' &= 60, & c' &= 109, \end{aligned}$$

on vérifie sans peine les relations précédentes.

3. Si, à (MNPQ), on substitue le groupe commençant par QP, on obtient encore un résultat intéressant; M peut s'écrire $P - N$, et Q, $P + N$. Par suite nous aurons

$$\begin{aligned} P + N, & \quad P, \quad 2P + N, \quad 3P + N, \\ a' &= 3P^2 + 4PN + N^2, & b' &= 4P^2 + 2PN, \\ b' - a' &= P^2 - N^2 - 2PN = a - b. \end{aligned}$$

Les côtés a, b , dans les deux triangles obtenus, ont

donc entre eux même différence en valeur absolue. Et si l'on poursuit indéfiniment l'opération de la même manière, on aura une série de triangles aux côtés de plus en plus grands, et tendant à devenir isoscèles, puisque la différence $a - b$ reste invariable.

Soit, comme exemple, le groupe (5, 4, 9, 13) qui donne $a = 65$, $b = 72$. Si nous formons (13, 9, 22, 31), les côtés correspondants sont $a' = 403$, $b' = 396$.

Comme le second terme 4 du groupe donné est plus petit que le premier 5, on aurait pu obtenir un triangle plus petit, correspondant à (3, 1, 4, 5) et dont les côtés 15, 8 ont encore la même différence 7 que ci-dessus.

Il faut ne pas oublier que cette différence est toujours de la forme $2N^2 - M^2$ en valeur absolue, $c - a$ étant toujours le double d'un carré, et $c - b$ un carré.

La série ordinaire de Fibonacci 1, 2, 3... permet, d'après ce qui précède, de former tous les triangles dans lesquels la différence $a - b$ est égale à l'unité, comme le montre le Tableau suivant :

M.	N.	P.	Q.	a.	b.	c.
1	1	2	3	3	4	5
3	2	5	7	21	20	29
7	5	12	17	119	120	169
17	12	29	41	697	696	985
41	29	70	99	4059	4060	5741
99	70	169	239	23661	23660	33461
.....						

Les fractions $\frac{c}{a}$, $\frac{c}{b}$ donnent des valeurs de $\sqrt{2}$, avec une approximation sans cesse croissante.

4. Indiquons encore la transformation qui consiste à

substituer au groupe (MNPQ) celui qui commence par PN, c'est-à-dire (PNQN + Q). En considérant les deux triangles (*abc*) (*a'b'c'*) qu'on obtient, nous aurons

$$N^2 = \frac{c-a}{2} = \frac{c'-a'}{2}, \quad P^2 = \frac{c+a}{2} = c' - b',$$

$$Q^2 = c + b = \frac{c' + a'}{2};$$

d'où

$$a' = b + \frac{a+c}{2}, \quad b' = b + c - a, \quad c' = b + c + \frac{c-a}{2}.$$

Sur l'exemple très simple du groupe (3, 2, 5, 7), qui donne (5, 2, 7, 9) et par conséquent

$$\begin{aligned} a &= 21, & b &= 20, & c &= 29, \\ a' &= 45, & b' &= 28, & c' &= 53, \end{aligned}$$

il est aisé de vérifier ces résultats.

En réitérant la transformation, on aurait toujours la même valeur pour N, et par suite on obtiendrait la suite indéfinie des triangles où la différence $c - a$ entre l'hypoténuse et le côté impair est constante, et égale à $2N^2$.

5. Remarquons en terminant, qu'on peut former tous les triangles dans lesquels $c + b$ ou $c - b$ est un carré donné; ou ceux dans lesquels $c + a$ ou $c - a$ est un double carré donné. Les premiers sont en nombre limité, et les autres en nombre infini. Par exemple, pour $c + b = 49$, il n'y a que trois triangles :

M.	N.	P.	Q.	a.	b.	c.
5	1	6	7	35	12	37
3	2	5	7	21	20	29
1	3	4	7	7	24	25

Pour $c - b = 49$, il y en a une infinité, correspondant à $M = 7$:

M.	N.	P.	Q.	a.	b.	c.
7	1	8	9	63	16	65
7	2	9	11	77	36	85
7	3	10	13	91	60	109
7	4	11	15	105	88	137