

Agrégation de l'enseignement secondaire des jeunes filles : concours de 1919. Problème de géométrie et de géométrie analytique

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 19 (1919), p. 342-354

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__342_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1919, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**AGRÉGATION DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE DES JEUNES
FILLES : CONCOURS DE 1919. — PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE
ET DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.**

ÉNONCÉ.

On donne une conique C et un point P dans son plan :

1° On demande de déterminer un point Q et deux droites D et D' passant par P telles que, M étant un point quelconque de la conique, si l'on désigne par ρ la distance QM, par δ et δ' les distances respectives du point M à chacune des droites D et D', le rapport $\frac{\rho^2}{\delta\delta'}$ soit égal à une constante. Déterminer la valeur de cette constante et discuter les conditions de possibilité du problème;

2° Lieu du point P quand les droites D et D' font entre elles un angle de grandeur constante;

3° Enveloppe des droites D et D' quand le point Q décrit l'axe focal de la conique.

SOLUTION PAR M^{lle} E. POMMIER.

I. — TRADUCTION ANALYTIQUE DE L'ÉNONCÉ.

Prendre un système d'axes de coordonnées rectangulaires : Soit $f(x, y) = 0$ l'équation de la conique ; soient α et β les coordonnées du point P, α' et β' celles du point Q. Les équations des droites D et D' qui passent par P peuvent se mettre sous la forme

$$D \equiv y - \beta - m(x - \alpha) = 0,$$

$$D' \equiv y - \beta - p(x - \alpha) = 0.$$

L'équation de la conique doit pouvoir s'écrire

$$(x - \alpha')^2 + (y - \beta')^2 - hDD' = 0,$$

h désignant une constante.

On a donc, en désignant par λ un facteur de proportionnalité,

$$f(x, y) \equiv \lambda[(x - \alpha')^2 + (y - \beta')^2 - hDD']$$

ou encore

$$(1) \quad f(x, y) + \mu DD' \equiv \lambda[(x - \alpha')^2 + (y - \beta')^2],$$

μ désignant le produit λh .

Cette identité (1) signifie que parmi les coniques passant par les points d'intersection de la conique $f(x, y) = 0$ avec les deux droites $D = 0$ et $D' = 0$, on trouve un cercle de rayon nul de centre Q ; ou encore un système de deux droites imaginaires conjuguées, de coefficients angulaires $\pm i$, se coupant en Q.

II. — SOLUTION GÉOMÉTRIQUE.

Faisons une figure avec des éléments réels.

Soient (*fig. 1*) PD et PD' deux sécantes coupant la conique respectivement en MN et en M'N'.

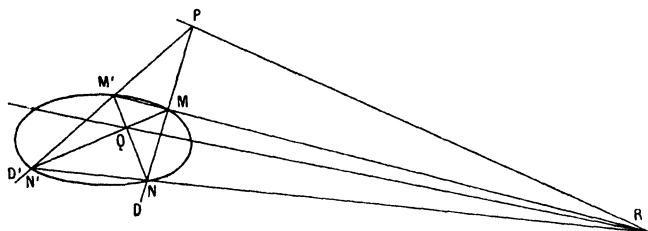
Par les quatre points M, M', N, N' passent trois couples de droites, à savoir :

Les droites D et D' .

Puis MN' et $M'N$ qui se coupent en Q .

Puis MM' et NN' qui se coupent en R .

Fig. 1.

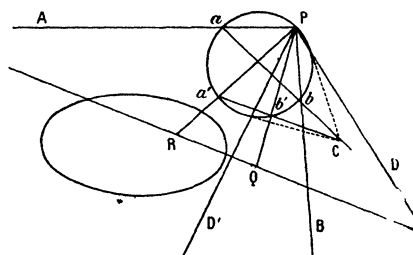


Le triangle PQR est conjugué par rapport à la conique [propriété du quadrilatère complet]. Les côtés QP et QR sont conjugués par rapport aux deux droites MQN' et NQM' . Les côtés PQ et PR sont conjugués par rapport aux droites D et D' .

Prenons maintenant le cas de l'énoncé actuel.

Si PD et PD' (*fig. 2*) sont les deux droites que l'on

Fig. 2.



demande de déterminer, elles ne peuvent pas couper la conique en des points réels. Les points M, M' ,

N, N' sont imaginaires. Les droites MN' et $M'N$ forment un cercle de rayon nul et de centre Q .

Les droites QP et QR , étant conjuguées par rapport à un cercle de centre Q , sont rectangulaires. Donc, P étant donné, pour avoir Q , on prend la polaire de P par rapport à la conique, et l'on abaisse PQ , perpendiculaire sur cette polaire. Le point R est alors le point de rencontre de la polaire du point Q avec la polaire du point P . Déterminons maintenant les droites D et D' .

La conique $MN', M'N$ étant du genre cercle, toutes les coniques qui passent par les points M, M', N, N' ont leurs axes parallèles, donc parallèles à ceux de la conique donnée $f(x, y) = 0$. Par suite, les droites MN et $M'N$ ou D et D' sont également inclinées sur les directions des axes de la conique donnée.

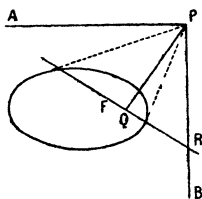
Si donc on mène par P , les parallèles PA et PB aux axes de la conique, les droites D et D' sont conjuguées harmoniques à la fois par rapport à l'angle $\widehat{APB}$ et par rapport à l'angle $\widehat{QPR}$. On est donc ramené à trouver les droites conjuguées harmoniques à la fois par rapport à deux angles donnés de mêmes sommets. Problème connu; par le sommet P commun aux deux angles, faisons passer un cercle qui coupe les côtés du premier en ab , et ceux du second en $a'b'$. Les droites ab et $a'b'$ se coupent en C . Par C menons les tangentes au cercle. Les droites D et D' qui joignent le sommet P des angles aux points de contact des tangentes sont conjuguées à la fois par rapport aux deux angles donnés de sommet P .

Ces droites D et D' sont également inclinées sur les directions des axes PA et PB .

Exemple. — Prenons le point P sur une direc-

trice (*fig. 3*). Sa polaire passe alors par le foyer F correspondant, et le point Q se confond avec ce foyer F.

Fig. 3



Le point R est alors sur la directrice, et la droite PB se confond avec la droite PR.

Les deux angles $\widehat{APB}$ et $\widehat{QPR}$ ont alors un côté commun, les deux droites D et D' sont confondues avec ce côté commun PRB.

III. — SOLUTION ANALYTIQUE.

Nous envisagerons successivement le cas de l'ellipse (ou de l'hyperbole) et celui de la parabole.

1. *Cas de l'ellipse.* — Nous allons prendre comme axes de coordonnées les axes de la conique qui a alors pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Pour les équations des droites D et D', on a alors $m = -p$.

Identifions cette équation de l'ellipse avec celle de la conique écrite sous la forme

$$(x - \alpha')^2 + (y - \beta')^2 - h[(y - \beta')^2 - m^2(x - \alpha')^2] = 0$$

ou, pour plus de symétrie, en posant

$$hm^2 = -\lambda,$$

$$h = \mu,$$

$$(x - \alpha')^2 + (y - \beta')^2 - \lambda(x - \alpha)^2 - \mu(y - \beta)^2 = 0.,$$

On a pour déterminer les inconnues λ , μ , α' , β' les quatre équations

$$(1) \quad \begin{cases} a^2(1 - \lambda) = b^2(1 - \mu) = \lambda\alpha^2 + \mu\beta^2 - \alpha'^2 - \beta'^2, \\ (2) \quad \begin{cases} \alpha' = \lambda\alpha, & \beta' = \mu\beta. \end{cases} \end{cases}$$

Ces équations donnent

$$a^2(1 - \lambda) = b^2(1 - \mu) = \lambda\alpha^2(1 - \lambda) + \mu\beta^2(1 - \mu).$$

En divisant par $a^2(1 - \lambda)$, il vient

$$1 = \frac{\lambda\alpha^2}{a^2} + \frac{\mu\beta^2(1 - \mu)}{a^2(1 - \lambda)}, \quad .$$

mais

$$\frac{1 - \mu}{1 - \lambda} = \frac{a^2}{b^2},$$

donc

$$(1') \quad 1 = \frac{\lambda\alpha^2}{a^2} + \frac{\mu\beta^2}{b^2},$$

$$(2') \quad a^2(1 - \lambda) = b^2(1 - \mu).$$

Ces deux équations déterminent λ et μ , les deux autres (2) donnent alors α' et β' qui sont toujours réels.

Vérification de la solution géométrique. — La polaire du point $\alpha\beta$ par rapport à la conique est

$$\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1 = 0.$$

Le point de coordonnées $\alpha'\beta'$ est sur cette polaire

$$\frac{\alpha\alpha'}{a^2} + \frac{\beta\beta'}{b^2} - 1 = 0.$$

Or, d'après la relation (2), ceci donne

$$\lambda \frac{a^2}{a^2} + \mu \frac{\beta^2}{b^2} - 1 = 0,$$

ce qui est précisément l'équation (1'). Donc le point Q est sur la polaire de P.

La droite PQ a pour coefficient angulaire

$$\frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha} = \frac{\beta}{\alpha} \frac{1 - \mu}{1 - \lambda} = \frac{\beta}{\alpha} \frac{a^2}{b^2}.$$

Cette droite est perpendiculaire à la polaire du point P, laquelle a pour coefficient angulaire $-\frac{\alpha b^2}{\beta a^2}$.

Le point Q est bien sur la polaire de P et sur la perpendiculaire à cette polaire menée par le point P.

Réalité des droites D et D'. — Pour cela, il faut et il suffit que m^2 soit positif, c'est-à-dire que l'on ait

$$\lambda \mu < 0.$$

Alors les deux droites sont

$$\lambda(x - \alpha)^2 + \mu(y - \beta)^2 = 0.$$

Elles sont confondues si l'on a

$$\lambda \mu = 0.$$

Or les équations (1') et (2') donnent

$$\lambda = \frac{1 + \frac{c^2 \beta^2}{b^4}}{a^2 \left[\frac{\alpha^2}{a^4} + \frac{\beta^2}{b^4} \right]}, \quad \mu = \frac{1 - \frac{c^2 \alpha^2}{a^4}}{b^2 \left[\frac{\alpha^2}{a^4} + \frac{\beta^2}{b^4} \right]},$$

λ est toujours positif. On a alors $\mu \leq 0$, soit

$$1 - c^2 \frac{\alpha^2}{a^4} \leq 0 \quad \text{ou} \quad \alpha^2 - \frac{a^4}{c^2} \geq 0.$$

$$\left(\alpha - \frac{a^2}{c} \right) \left(\alpha + \frac{a^2}{c} \right)$$

Le point P ne doit pas être compris entre les deux directrices de la conique.

Si P est sur une des directrices $\mu = 0$, l'équation des deux droites se réduit à $\lambda(x - \alpha)^2 = 0$. Elles sont confondues, parallèles à Oy, et passent par le point d'abscisse α , donc par P qui est sur la directrice.

Lieu de P quand D et D' font entre elles un angle constant. — On a alors,

$$m = \text{const.}$$

et, par suite,

$$\frac{\lambda}{\mu} = -m^2 = \text{const.}$$

Soit

$$\lambda = -m^2 \mu$$

ou

$$b^2 \left[1 + c^2 \frac{\beta^2}{b^4} \right] = -m^2 \left(1 - c^2 \frac{\alpha^2}{a^4} \right) a^2,$$

$$\frac{c^2 \beta^2}{b^2} - c^2 m^2 \frac{\alpha^2}{a^2} + a^2 m^2 + b^2 = 0,$$

conique du genre hyperbole ayant même centre et mêmes axes que l'ellipse donnée.

Cas particuliers :

$$1^\circ \quad m = 0, \quad \lambda = 0, \quad b^4 + c^2 \beta^2 = 0, \quad \beta^2 = -\frac{b^4}{c^2};$$

P est sur les directrices imaginaires de la conique.

2° m infini

$$\mu = 0, \quad a^4 = c^2 \alpha^2, \quad \alpha^2 = \frac{a^4}{c^2};$$

P est sur les directrices de la conique.

Enveloppe des droites D et D' quand le point Q décrit l'axe focal de la conique. — Dans ce cas $\beta' = 0$, soit $p\mu = 0$.

Si $\mu \neq 0$, D et D' restent parallèles à l'axe Oy.

Si $b = 0$, on a

$$\lambda = \frac{a^2}{x^2}, \quad \mu = \frac{1 - c^2 \frac{x^2}{a^4}}{b^2 \frac{x^2}{a^4}},$$

$$-m^2 = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{a^2}{x^2} \frac{b^2 x^2}{(a^4 - c^2 x^2)},$$

$$m^2 = \frac{a^2 b^2}{c^2 x^2 - a^4}.$$

L'équation des deux droites devient alors

$$y^2 = \frac{a^2 b^2}{c^2 x^2 - a^4} (x - \alpha)^2,$$

soit, après avoir chassé le dénominateur, en ordonnant par rapport aux puissances décroissantes de x ,

$$x^2[y^2 c^2 - a^2 b^2] + 2 a x a^2 b^2 - a^4 y^2 - x^2 a^2 b^2 = 0,$$

équation de l'ensemble des deux droites dans laquelle le paramètre x figure au second degré. On obtient l'enveloppe des droites en écrivant que cette équation admet une racine double par rapport à l'inconnue x .

On a donc

$$x^2 a^4 b^2 - [y^2 c^2 - a^2 b^2] [a^4 y^2 - x^2 a^2 b^2] = 0.$$

Soit, quand on a divisé par a^2 , après réduction des termes semblables,

$$y^2 [y^2 a^2 c^2 - x^2 b^2 c^2 - a^4 b^2] = 0.$$

L'enveloppe des droites se décompose; elle comprend d'une part l'hyperbole

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{a^2}{c^2} = 0$$

et, d'autre part, deux fois la droite

$$y = 0,$$

c'est-à-dire que les droites sont tangentes à cette hyperbole, ou restent parallèles à l'axe $x'x$.

β. *Cas de la parabole.* — Nous allons rapporter la conique à son axe et à sa tangente au sommet. Elle a alors pour équation

$$y^2 - 2px = 0.$$

Les droites D et D' sont encore également inclinées sur les axes, et l'on a

$$m = -p.$$

L'équation de la conique étant, d'autre part, écrite sous la forme

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 - \lambda(x - \alpha)^2 - \mu(y - \beta)^2 = 0.$$

L'identification des deux équations nous permet de déterminer les inconnues α' , β' , λ , μ . On a

$$\begin{aligned} (1) \quad & 1 - \mu = \frac{\alpha' - \lambda\alpha}{p}, \\ (2) \quad & 1 - \lambda = 0, \quad \beta' = \beta\mu, \quad \lambda\alpha^2 + \mu\beta^2 - \alpha'^2 - \beta'^2 = 0. \end{aligned}$$

on en tire

$$\begin{aligned} \lambda &= 1, \quad 1 - \mu = \frac{\alpha' - \alpha}{p}, \\ \alpha^2 - \alpha'^2 + \mu\beta^2(1 - \mu) &= 0, \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} \alpha^2 - \alpha'^2 - \mu\beta^2 \frac{\alpha' - \alpha}{p} &= 0, \\ (\alpha' - \alpha) \left[\frac{\mu\beta^2}{p} - \alpha - \alpha' \right] &= 0. \end{aligned}$$

Nous supposons $\alpha' \neq \alpha$, sans quoi on aurait $\mu = 1$ et par suite $\beta' = \beta$. P et Q sont confondus et P est sur la conique. Il vient donc

$$\frac{\mu\beta^2}{p} - \alpha - \alpha' = 0 \quad \text{et} \quad 1 - \mu = \frac{\alpha' - \alpha}{p},$$

Soit encore

$$\frac{\mu\beta^2}{p} - \alpha' = \alpha, \quad p\mu + \alpha' = p + \alpha.$$

Ces deux équations déterminent α' et μ . On en tire

$$\mu = \frac{p(p + 2\alpha)}{p^2 + \beta^2}, \quad \alpha' = \alpha + \frac{p[\beta^2 - 2p\alpha]}{\beta^2 + p^2}.$$

D'autre part,

$$\beta' = \frac{p\beta[p + 2\alpha]}{p^2 + \beta^2}.$$

Vérification de la solution géométrique. — La polaire du point $\alpha\beta$ par rapport à la conique a pour équation

$$y\beta - px - pz = 0.$$

Le point de coordonnées $\alpha'\beta'$ est sur cette polaire

$$\beta'\beta - p\alpha' - p\alpha = 0,$$

ce qui donne

$$\mu\beta^2 - p[\alpha' + \alpha] = 0,$$

expression que nous avons trouvée comme conséquence des équations (1) et (2). Donc le point Q est sur la polaire de P.

Coefficient angulaire de la droite PQ

$$\frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha} = \frac{\beta(\mu - 1)}{p(1 - \mu)} = -\frac{\beta}{p}.$$

Cette droite est perpendiculaire à la polaire du point P, qui a pour coefficient angulaire $\frac{p}{\beta}$.

Réalité des droites D et D'. — Comme $\lambda = 1$, il faut et il suffit que l'on ait $\mu \leq 0$.

Alors les deux droites sont

$$(x - \alpha)^2 + \mu(y - \beta)^2 = 0.$$

$\mu \leq 0$ donne

$$\frac{p(p+2\alpha)}{p^2+\beta^2} \leq 0;$$

p étant supposé positif, il vient

$$\alpha \leq -\frac{p}{2}.$$

P doit être à gauche de la directrice. S'il vient sur la directrice, $\mu = 0$ et les deux droites D et D' sont confondues entre elles et avec la directrice.

Lieu de P quand D et D' font entre elles un angle constant. — On doit avoir

$$\frac{\lambda}{\mu} = -m^2 = \text{const.};$$

par suite,

$$-m^2 = \frac{1}{\mu},$$

soit

$$1 + m^2\mu = 0,$$

$$p^2 + \beta^2 + m^2p(p+2\alpha) = 0,$$

$$\beta^2 + 2pm^2\alpha + p^2(1+m^2) = 0,$$

conique du genre parabole ayant même axe que la parabole donnée.

Cas particuliers :

$$m = 0, \quad p^2 + \beta^2 = 0, \quad \beta^2 = -p^2;$$

$$m \text{ infini}, \quad \mu = 0, \quad p = -2\alpha;$$

P est sur la directrice.

$$m = \pm i, \quad 1 + m^2 = 0, \quad \beta^2 - 2p\alpha = 0;$$

P est sur la conique.

Enveloppe des droites D et D' quand Q décrit

Ann. de Mathémat., 4^e série, t. XIX. (Septembre 1919.) 27

l'axe focal de la conique. — $\beta' = 0$ entraîne $\beta\mu = 0$.

Si $\mu = 0$, D et D' restent parallèles à Oy.

$\beta = 0$. On a alors

$$\mu = \frac{p + 2x}{p}$$

et

$$-m^2 = \frac{p}{p + 2x}.$$

L'équation des deux droites devient alors

$$y^2 + \frac{p}{p + 2x} (x - x)^2 = 0,$$

soit, après avoir chassé le dénominateur, en ordonnant par rapport à x,

$$p x^2 - 2x[-y^2 + px] + p[x^2 + y^2] = 0.$$

Cette équation a une racine double x si l'on a

$$[y^2 - px]^2 - p^2[x^2 + y^2] = 0,$$

soit

$$y^2[y^2 - 2px - p^2] = 0.$$

Les droites D et D' sont, dans ce cas, ou parallèles à l'axe de la parabole, ou tangentes à la parabole ayant pour équation

$$y^2 - 2px - p^2 = 0.$$

Remarque. — Si l'on déplace P en R, réciproquement R vient en P. Si les deux droites D et D' passant par P sont réelles, les deux droites analogues passant par R sont imaginaires et inversement.