

PHILBERT DU PLESSIS

Remarques géométriques sur une question de concours à l'École polytechnique en 1919

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 19 (1919), p. 338-342

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__338_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1919, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[L'4a]

**REMARQUES GEOMETRIQUES SUR UNE QUESTION
DE CONCOURS A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1919 ;**

PAR M. PHILBERT DU PLESSIS.

Il s'agit d'étudier les systèmes des cercles ayant pour diamètres les segments des tangentes à une ellipse compris entre les tangentes à cette ellipse en ses sommets opposés.

Établissons d'abord un lemme. Supposons qu'une tangente variable à une conique rencontre en T et T' deux tangentes fixes à cette conique. Joignons les points T et T' à un point fixe F du plan de la conique. Les rayons FT et FT' engendrent évidemment deux faisceaux homographiques dont les rayons doubles sont les tangentes menées de F à la conique. Donc le rapport anharmonique déterminé par FT et FT' avec ces

(¹) Ce problème fait l'objet de la question n° (2414) (*N. A.*, 1919, p. 239).

deux tangentes est constant. Par suite, si F est un foyer de la conique, les deux tangentes menées de ce point à la conique étant alors les droites isotropes, l'angle TFT' est constant, par application de la célèbre formule de Laguerre.

Je dis que si les tangentes fixes que parcourent T et T' sont les tangentes aux sommets A et A' du grand axe de l'ellipse, cet angle est droit. En effet, considérons la position particulière $\text{T}_0\text{T}'_0$ de la tangente variable parallèle à AA'. Si le foyer F se projette en H sur $\text{T}_0\text{T}'_0$, on a

$$\text{HT}_0 = \text{FA} = a - c, \quad \text{HT}'_0 = \text{FA}' = a + c, \quad \text{FH} = b,$$

et, par suite,

$$\overline{\text{FH}}^2 = \text{HT}_0 \cdot \text{HT}'_0,$$

ce qui prouve bien que l'angle $\text{T}_0\text{FT}'_0$ est droit.

Il résulte de là que le cercle décrit sur TT' comme diamètre passe par le foyer F, et, par conséquent, aussi par le foyer F' de l'ellipse.

Ainsi, tous les cercles ayant pour diamètres les segments des tangentes à ellipse, compris entre les tangentes aux sommets du grand axe, passent par les foyers réels de cette ellipse.

Le principe de continuité permet d'énoncer également que les cercles ayant pour diamètres les segments des tangentes compris entre les tangentes aux sommets du petit axe passent par les foyers imaginaires situés sur ce petit axe. Autrement dit, ils sont tous orthogonaux au cercle décrit sur la distance des foyers réels pour diamètre.

Il suffit de projeter la figure formée par un cercle, un de ses diamètres, une tangente parallèle à ce diamètre et deux tangentes parallèles quelconques

pour voir que *le produit des segments déterminés sur une tangente à une ellipse, à partir de son point de contact, par deux tangentes parallèles quelconques à cette ellipse, est égal au carré du demi-diamètre de l'ellipse, parallèle à la première tangente.*

Si donc la tangente en M à l'ellipse coupe les tangentes aux extrémités du grand axe en T et T', et les tangentes aux extrémités du petit axe en U et U', on a, à la fois, en représentant par a' le demi-diamètre de l'ellipse parallèle à cette tangente,

$$MT.MT' = MU.MU' = a'^2.$$

Le point M appartient donc à l'axe radical des cercles de diamètre TT' et UU', et comme, d'autre part, cet axe radical est perpendiculaire à la ligne TT' des centres, il se confond avec la perpendiculaire élevée en M à TT', c'est-à-dire avec *la normale en M à l'ellipse.*

Mais on voit qu'il y a plus, la relation ci-dessus ayant lieu pour les segments déterminés sur la tangente en M par deux tangentes parallèles *quelconques* à l'ellipse, on peut dire que *la normale en M est l'axe radical commun de tous les cercles ayant pour diamètres les segments de la tangente en M limités à deux tangentes parallèles quelconques à l'ellipse.*

Les points D et D' de cet axe radical par lesquels passent tous ces cercles sont donc tels que

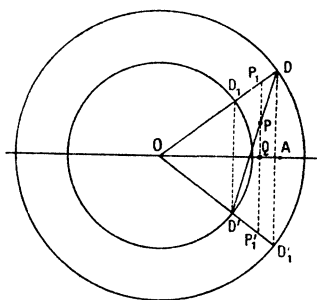
$$MD = MD' = a'.$$

Or, on sait que, si, sur la normale en M, on porte, de part et d'autre de M, des longueurs MD et MD' égales au demi-diamètre conjugué de OM

(O étant le centre de l'ellipse), les points D et D' sont respectivement à la rencontre des cercles de centre O et de rayons $a + b$ et $a - b$ avec les demi-droites joignant le point O aux points de rencontre de la perpendiculaire à l'axe AA' menée par M et du cercle décrit sur AA' comme diamètre ⁽¹⁾.

Le lieu du point P visé par la troisième partie de l'énoncé peut donc être ainsi défini : Les cercles de centre O et de rayons $a + b$ et $a - b$ étant coupés en D et en D' par deux demi-droites symétriques par rapport à OA, trouver le lieu du point P divisant DD' dans un rapport constant.

Pour trouver ce lieu, considérons les points D₁ et D'₁ où les droites OD et OD' coupent encore les cercles



considérés, tels, par conséquent, que les cordes D₁D' et DD'₁ soient perpendiculaires à OA, et menons par P la parallèle P₁P'₁ à ces cordes.

P₁ divisant DD₁ dans le rapport constant suivant lequel P divise DD', le point P₁ décrit un cercle (P₁) de

⁽¹⁾ On trouvera notamment une démonstration géométrique de ce théorème dans la Remarque finale du n° 126 du *Cours de Géométrie pure et appliquée de l'École Polytechnique*, de M. d'Ocagne (t. I, p. 268).

centre O. D'autre part, les points D et D' divisant OP_1 et OP'_1 dans des rapports constants, la transversale DD' au triangle $OP_1P'_1$ divise le côté $P_1P'_1$ dans un rapport constant. Donc, si l'on prend le milieu Q de $P_1P'_1$, le point P divise l'ordonnée QP_1 du cercle (P_1) dans un rapport constant; il décrit donc une ellipse dont un axe est dirigé suivant OA.