

MICHEL PETROVITCH

Théorème général sur les équations algébriques

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 19
(1919), p. 281-284

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__281_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1919, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[A3e]

THÉOREME GÉNÉRAL SUR LES ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES;

PAR M. MICHEL PETROVITCH.

(Belgrad, Serbie.)

Étant donnée l'équation algébrique *la plus générale*

$$(1) \quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = 0$$

(les coefficients et les racines n'étant assujettis à *aucune restriction*), il est possible, en utilisant certains résultats aujourd'hui connus sur la série de Taylor et les équations (1), d'assigner dans le plan de l'inconnue x une couronne circulaire C contenant sûrement une racine de (1).

Supposons $a_0 \neq 0$, $a_1 \neq 0$ (ce qui ne diminue nullement la généralité) et soit α la racine de (1) la plus rapprochée de l'origine (ou bien l'une de telles racines, s'il y en a plusieurs de même module). Si l'on forme la fonction

$$(2) \quad u(r) = \frac{1}{r^2} \sum_{k=0}^{k=n} |a_k|^2 r^{2k},$$

on aura, d'après un théorème général sur la série de Taylor que j'ai démontré dans un Travail antérieur ⁽¹⁾,

$$(3) \quad |x| = \frac{|a_0|}{\sqrt{u(r)}},$$

quelle que soit la valeur positive r .

(1) M. PETROVITCH, *Bull. de la Soc. math. de France*, t. XXIX, *Ann. de Mathémat.*, 4^e série, t. XIX. (Août 1919.)

Lorsque r croît par valeurs réelles de 0 à ∞ , la fonction réelle $u(r)$ commence par décroître, atteint un minimum positif L après lequel elle croît constamment. Par suite, d'après (3), la racine α ne se trouve jamais à l'intérieur du cercle C_1 ayant l'origine centre et

$$(4) \quad R_1 = \frac{|a_0|}{\sqrt{L}}$$

comme rayon.

D'une autre part, d'après un résultat démontré par M. Fejér⁽²⁾, la racine de moindre module de (1) ne se trouve jamais à l'extérieur du cercle C_2 ayant l'origine comme centre et

$$(5) \quad R_2 = n \left| \frac{a_0}{a_1} \right|$$

comme rayon.

Les deux propositions se résument dans le théorème que nous avons en vue et qui est le suivant :

THÉORÈME : *l'équation algébrique (1) a au moins une racine dans la couronne circulaire C limitée par les deux cercles C_1 et C_2 (ou sur les bords mêmes de la couronne) et n'a aucune racine entourée par la couronne.*

Les bords, extérieur et intérieur, de la couronne C, représentés par les cercles C_1 et C_2 , fournissent les limites *les plus précises* qu'il soit possible d'assigner à la couronne pour que le théorème soit valable dans le cas le plus général. En effet, le bord extérieur C_2

1901, p. 303-312. — E. LANDAU, *Bull. de la Soc. math. de France*, t. XXXIII, 1905, p. 251-261. Le signe d'égalité dans (3) est dû à M. Landau.

(1) L. Fejér : *C. R. de l'Acad. des Sc.*, 1907, t. II, p. 459-461.

de la couronne C correspondant à l'équation

$$(6) \quad \alpha_0 \left(1 + \frac{\alpha_1 x}{n \alpha_0} \right)^n = \alpha_0 + \alpha_1 x + \frac{n-1}{2n\alpha_0} \alpha_1^2 x^2 + \dots = 0$$

(cas signalé par M. Fejér) est effectivement atteint par les n racines égales de (6). D'une autre part, l'équation

$$(7) \quad -1 + x + x^2 + \dots + x^n = 0$$

admet pour le minimum L une valeur tendant vers 4 et une racine α tendant vers $\frac{1}{2}$ lorsque son degré n augmente indéfiniment; à la valeur limite $L=4$ correspond la circonférence C_1 de rayon $\frac{1}{2}$ de laquelle s'approche indéfiniment la racine α lorsque n augmente [le cas limite $\frac{-1+2x}{1-x} = 0$ de l'équation (7) a été signalé par M. Landau *loc. cit.*].

L'épaisseur D de la couronne C est

$$(8) \quad D = R_2 - R_1 = |\alpha_0| \left(\frac{n}{|\alpha_1|} - \frac{1}{\sqrt{L}} \right),$$

et il est impossible de rétrécir la couronne dans un sens ou l'autre sans qu'elle cesse de contenir la racine α dans tous les cas possibles. Comme l'on a

$$L \geq |\alpha_1|^2,$$

la valeur D ainsi déterminée est supérieure ou égale à

$$(n-1) \left| \frac{\alpha_0}{\alpha_1} \right|.$$

Dans le cas où la racine α est réelle, elle est comprise dans l'intervalle $(-R_2, -R_1)$ ou bien (R_1, R_2) suivant qu'elle est négative ou positive (pouvant coïncider avec une limite de cet intervalle).

On peut, manifestement, dans le théorème précédent, substituer à L une limite supérieure de cette valeur.

Une telle limite serait, par exemple, la valeur que prend la fonction $u(r)$ pour une valeur positive arbitraire r .

Enfin, nous rappellerons l'existence d'un théorème en quelque sorte opposé au précédent : tandis que celui-ci concerne les racines de l'équation (1) *compris* dans une couronne circulaire n'entourant aucune racine de cette équation, le théorème que nous avons en vue concerne les racines *entourées* par une couronne mais ne contenant elle-même aucune racine. Le théorème, ne supposant que la réalité des coefficients de l'équation (1), fournit une règle pour déterminer exactement le nombre de racines entourées par une telle couronne, ce nombre étant fourni comme partie entière d'une certaine expression numérique qui s'exprime *algébriquement* à l'aide des coefficients a_k , du rayon et de l'épaisseur de la couronne (1).