

H. VOGT

**Réduction à une forme normale d'un système
d'équations différentielles simultanées
linéaires à coefficients constants**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 19
(1919), p. 201-209

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__201_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1919, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

et nous nous limiterons au cas où le déterminant de ces coefficients

$$A(D) = |a_{ij}(D)| \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

est différent de zéro, nous réservant d'examiner plus tard le cas où il est identiquement nul. Nous montrerons que le système (1) est équivalent à un autre système d'équations différentielles renfermant chacune une seule fonction inconnue, la somme des ordres de ces équations étant égale au degré de $A(D)$; nous nous appuierons pour cela sur le lemme suivant :

En composant symboliquement les équations (1) avec les éléments d'un système de polynômes entiers

$$a'_{ij}(D) \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

dont le déterminant $\Delta'(D)$ se réduit à l'unité, on forme un système d'équations

$$(2) \quad \sum_{j=1}^{j=n} \left(\sum_{k=1}^k a'_{ik} a_{kj} \right) x_j = \sum_{k=1}^{k=n} a'_{ik} u_k \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

équivalent au premier.

Cela résulte de ce que le système (1) se déduit inversement des équations (2) en composant ces dernières avec les éléments du système complémentaire de $a'_{ij}(D)$, et tous ces éléments sont des polynômes entiers; toute solution du système (1) satisfait au système (2) et réciproquement.

2. Considérons le déterminant $A(D)$ des coefficients a_{ij} ; désignons par $A_1(D)$ le plus commun diviseur de ses mineurs relatifs aux éléments de la première colonne, et d'une manière générale par $A_j(D)$ le plus grand

commun diviseur des mineurs de $A(D)$ ne renfermant aucun élément des J premières colonnes. mineurs d'ordre maximum tirés de la matrice

$$M_J = \| a_{iJ+1} a_{iJ+2} \dots a_{in} \| \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

nous obtenons une suite de polynomes auxquels nous adjoignons $\Lambda_n(D) = 1$; cette suite

$$\Lambda(D), \quad \Lambda_1(D), \quad \Lambda_2(D), \quad \dots, \quad \Lambda_n(D)$$

est telle que chacun de ses termes divise le précédent : nous formons ensuite les quotients successifs

$$d_1(D) = \frac{\Lambda(D)}{\Lambda_1(D)}, \quad d_2(D) = \frac{\Lambda_1(D)}{\Lambda_2(D)}, \quad \dots, \quad d_n(D) = \frac{\Lambda_{n-1}(D)}{\Lambda_n(D)}$$

dont le produit est égal à $\Lambda(D)$.

Les mineurs A_{i1} de A relatifs aux éléments de la première colonne ont pour plus grand commun diviseur Λ_1 ; on sait calculer par des opérations élémentaires des polynomes entiers que nous appellerons $b_{i1}(D)$ tels que l'on ait identiquement

$$b_{11} \Lambda_{11} + b_{21} \Lambda_{21} + \dots + b_{n1} \Lambda_{n1} = \Lambda_1.$$

nous pouvons écrire le premier membre sous forme d'un déterminant que nous appelons B , et qui est

$$B = \| b_{i1} a_{i1} a_{i2} \dots a_{in} \| = \Lambda_1$$

Considérons de même les $\frac{n(n-1)}{2}$ mineurs

$$\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial a_{h1} \partial a_{k2}} \quad (h, k = 1, 2, \dots, n, h > k)$$

tirés de la matrice

$$M_2 = \| a_{i3} a_{i4} \dots a_{in} \|$$

mineurs qui ont pour plus grand commun diviseur $\Lambda_2 =$

nous savons calculer des polynomes entiers l_{hk} tels que l'on ait

$$\sum l_{hk} \frac{\partial^2 A}{\partial a_{h1} \partial a_{k2}} = A_2;$$

par analogie, nous écrirons le premier membre de cette égalité sous la forme d'un déterminant que nous appellerons C et que nous écrirons

$$C = |c_{i1} c_{i2} a_{i3} \dots a_{in}| = A_2.$$

Nous introduisons, dans l'écriture de ce déterminant C, $2n$ éléments c_{i1}, c_{i2} , qui ne sont pas déterminés complètement par les conditions précédentes; *leur existence sous forme de polynomes n'est même nullement prouvée, mais elle n'est pas nécessaire*; nous n'aurons en effet à utiliser, dans les calculs ultérieurs, que des développements de déterminants suivant la règle de Laplace, et que les déterminants du second ordre tirés de la matrice

$$\|c_{i1} c_{i2}\|,$$

ces déterminants sont précisément les polynomes l_{hk} . Il en est de ces éléments c comme des racines imaginaires ou idéales de certaines équations dont les fonctions symétriques interviennent seules dans les calculs.

De la même manière, nous considérons les mineurs de A tirés de la matrice

$$M_3 = \|a_{i3} a_{i4} \dots a_{in}\|,$$

mineurs ayant pour plus grand commun diviseur A_3 ; nous savons calculer des polynomes entiers dont les produits par ces mineurs ont une somme égale à A_3 ; ces polynomes peuvent être considérés comme les déterminants du troisième ordre tirés d'une matrice

$$\|d_{i1} d_{i2} d_{i3}\|$$

et entrant dans un déterminant que nous appellerons D, tel que l'on ait

$$D = |d_{i1} d_{i2} d_{i3} a_{i4} \dots a_{in}| = A_3.$$

l'existence et le rôle des éléments d donnant lieu aux mêmes remarques que pour les éléments c .

Nous continuerons de la même manière jusqu'au plus grand commun diviseur A_{n-1} des éléments a_{in} , et jusqu'à un déterminant H ayant pour valeur

$$H = |h_{i1} h_{i2} \dots h_{in} a_{in}| = A_{n-1}.$$

3. Nous considérerons les déterminants successifs

$$A, \quad B, \quad C, \quad D, \quad \dots, \quad H$$

et les mineurs du premier ordre de chacun d'eux par rapport aux éléments a de la première de leurs colonnes qui renferme ces éléments; nous formerons ainsi un tableau de polynomes entiers :

$$\begin{array}{cccccc} A_{11} & B_{12} & C_{13} & \dots & H_{1n}, \\ A_{21} & B_{22} & C_{23} & \dots & H_{2n}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots, \\ A_{n1} & B_{n2} & C_{n3} & \dots & H_{nn} \end{array}$$

dont les éléments de la première colonne sont divisibles par A_1 , ceux de la deuxième par A_2 , et ainsi de suite, nous effectuerons les quotients de ces éléments par ces diviseurs respectifs, et nous obtiendrons un nouveau tableau dont nous désignerons le déterminant par

$$\Delta = \left| \frac{A_{11}}{A_1} \frac{B_{12}}{A_2} \dots \frac{H_{1n}}{A_n} \right|.$$

Ce déterminant est égal à l'unité; si nous le multiplions en effet par le déterminant A(D), nous

obtenons pour le produit la valeur

$$\Delta A = \begin{vmatrix} \frac{1}{A_1} \sum A_{i1} a_{i1} & \frac{1}{A_1} \sum A_{i1} a_{i2} & \dots & \frac{1}{A_1} \sum A_{i1} a_{in} \\ \frac{1}{A_2} \sum B_{i2} a_{i1} & \frac{1}{A_2} \sum B_{i2} a_{i2} & \dots & \frac{1}{A_2} \sum B_{i2} a_{in} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ \frac{1}{A_n} \sum H_{in} a_{i1} & \frac{1}{A_n} \sum H_{in} a_{i2} & \dots & \frac{1}{A_n} \sum H_{in} a_{in} \end{vmatrix}$$

les sommes étant effectuées pour les valeurs de i égales à 1, 2, ..., n .

Mais, dans ce produit, les éléments de la diagonale principale sont respectivement égaux à

$$\frac{A}{A_1} = d_1, \quad \frac{A_1}{A_2} = d_2, \quad \dots, \quad \frac{A_{n-1}}{A_n} = d_n;$$

ceux qui sont à droite de cette diagonale sont tous nuls comme développements de déterminants ayant deux colonnes identiques : on voit donc que le produit ΔA est égal à $d_1, d_2, \dots, d_n$ ou A , par conséquent Δ est égal à l'unité.

Les autres éléments du déterminant ΔA nous seront utiles; ce sont des polynomes entiers qui peuvent s'exprimer sous forme de déterminants et que nous désignerons par x_{ij} ($i > j$); ils ont pour valeurs

$$\begin{aligned} x_{21} &= \frac{1}{A_2} [b_{i1} a_{i1} a_{i3} a_{i4} \dots a_{in}], \\ x_{31} &= \frac{1}{A_3} [c_{i1} c_{i2} a_{i1} a_{i4} \dots a_{in}], \\ x_{32} &= \frac{1}{A_3} [c_{i1} c_{i2} a_{i2} a_{i4} \dots a_{in}], \\ &\dots\dots\dots \\ x_{nn-1} &= \frac{1}{A_n} [h_{i1} h_{i2} \dots h_{in-1} a_{in-1}]. \end{aligned}$$

4. Puisque le déterminant Δ est égal à l'unité, la

composition du système des équations (1) avec les éléments de ce déterminant fournit un système équivalent au premier; les coefficients des inconnues dans les premiers membres des nouvelles équations sont précisément égaux aux éléments du déterminant ΔA que nous venons de calculer; quant aux seconds membres, ils sont respectivement égaux à

$$\sum_i \frac{A_{i1}}{A_1} u_i, \quad \sum_i \frac{B_{i2}}{A_2} u_i, \quad \dots, \quad \sum_i \frac{H_{in}}{A_n} u_i;$$

ils peuvent du reste être écrits sous forme de déterminants et nous les désignerons par

$$v_1 = \frac{1}{A_1} | u_i \ a_{i2} a_{i3} a_{i4} \dots a_{in} |,$$

$$v_2 = \frac{1}{A_2} | b_{i1} u_i \ a_{i3} a_{i4} \dots a_{in} |,$$

$$v_3 = \frac{1}{A_3} | c_{i1} c_{i2} u_i \ a_{i4} \dots b_{in} |,$$

$$\dots\dots\dots;$$

$$v_n = \frac{1}{A_n} | h_{i1} h_{i2} \dots h_{in-1} u_i |.$$

Finalement, le système des équations données (1) est équivalent au système

$$(3) \quad \begin{cases} d_1(D)y_1 & = v_1, \\ x_{21}(D)y_1 - d_2(D)y_2 & = v_2, \\ x_{12}(D)y_1 + x_{32}(D)y_2 + d_3(D)y_3 & = v_3, \\ \dots\dots\dots \\ x_{n-1}(D)y_1 + \dots + x_{nn-1}(D)y_{n-1} + d_n(D)y_n & = v_n, \end{cases}$$

que nous dirons de *forme normale*; en faisant passer dans les seconds membres les termes de coefficients x_{ij} , nous arrivons au résultat suivant :

Lorsque le déterminant $A(D)$ des coefficients des

inconnues dans les équations données n'est pas nul, le système de ces équations est équivalent à un autre système de forme normale constitué par des équations successives

$$d_1(D)y_1 = w_1, \quad d_2(D)y_2 = w_2, \quad \dots, \quad d_n(D)y_n = w_n;$$

le premier membre de chacune d'elles renferme une seule fonction inconnue; son second membre est une fonction déterminée des quantités données et des solutions des équations précédentes.

5. Nous terminerons par les remarques suivantes :

Remarque I. — La somme des ordres des équations de forme normale est égale au degré du déterminant $A(D)$; le nombre des constantes arbitraires entrant dans la solution générale est égal à ce degré.

Remarque II. — Le nombre des constantes entrant dans y_1 est égal au degré de $d_1(D)$; comme on peut diriger le calcul de façon qu'une fonction quelconque donnée à l'avance entre dans la première des équations finales, on arrive à ce résultat :

Pour trouver le nombre des constantes dont dépend la valeur d'une fonction inconnue, on détermine le plus grand commun diviseur des mineurs du déterminant $A(D)$ par rapport aux coefficients de cette fonction; le nombre cherché est égal au degré par rapport à D du quotient de $A(D)$ par ce plus grand commun diviseur.

Remarque III. — Le cas le plus simple est celui où

les mineurs de $A(D)$ par rapport aux coefficients d'une inconnue sont des polynomes premiers entre eux dans leur ensemble; nous pouvons supposer que cette inconnue est y_1 . Elle est alors fournie par la première équation normale

$$A(D)y_1 = v_1$$

et l'on obtient simplement cette équation en appliquant au système donné la règle de Cramer utilisée dans la résolution des équations algébriques linéaires.

Les autres fonctions inconnues sont ensuite déterminées sans aucune intégration nouvelle par des équations normales

$$y_2 = w_2, \quad y_3 = w_3, \quad \dots, \quad y_n = w_n,$$

dont les seconds membres sont des fonctions déterminées de y_1 et des quantités connues.

Remarque II. — Dans le cas général, on peut apporter des simplifications aux coefficients des équations (3) lorsque certains des polynomes $d(D)$ se réduisent à des constantes. Si, pour fixer les idées, $d_p(D)$ est une constante, y_p est déterminée sans intégration au moyen de $y_1, y_2, \dots, y_{p-1}$; on peut ensuite combiner l'équation de rang p avec chacune des suivantes, et annuler dans celles-ci le coefficient de y_p .

En résumé, on peut former des équations normales de la forme (3) de façon que les coefficients α_{ip} soient nuls pour toutes les valeurs de i dès que $d_p(D)$ est constant. Cette simplification peut d'ailleurs être obtenue *a priori* en choisissant convenablement les éléments $b, c, \dots, h$ des déterminants $B, C, \dots, H$.