

## Solutions de questions proposées

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 19 (1919), p. 188-200

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1919\\_4\\_19\\_\\_188\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__188_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1919, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

---

424.

(1858, p. 33; 1916, p. 518.)

*Étant données les erreurs absolues  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  commises sur la mesure des côtés d'un triangle sphérique, en calculer les effets sur les angles.*

GAILLET.

SOLUTION

Par M. H. DE MONTILLE.

Cette question reçoit une indication de solution même dans certaines Trigonométries (*Traité de Trigonométrie*, de Serret, dernier Chapitre) sous forme de formules différentielles déduites des relations fondamentales, de même que dans des cours connus d'Astronomie théorique et des cours d'Écoles. Voici une réponse :

Traitons les erreurs  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  en différentielles respectives des

variables indépendantes  $a, b, c$ . L'erreur  $\Delta A$  commise sur l'angle  $A$  opposé à  $a$ , peut, dans ce qui suit, être remplacée par la différentielle  $dA$  (le reste de la série de Taylor étant alors de second ordre).

Or la différentiation de la formule classique

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

mise sous la forme

$$(1) \quad \cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},$$

donne

$$\begin{aligned} -\sin A \, dA = & -\frac{\sin a \, da}{\sin b \sin c} + \frac{\sin a}{\sin^2 b \sin^2 c} \\ & + [\sin c (\cos c - \cos a \cos b) \\ & + \sin b (\cos b - \cos a \cos c)], \end{aligned}$$

ou, sous forme abrégée, à l'aide de deux relations homologues à (1) :

$$(2) \quad \frac{\sin A}{\sin a} \sin b \sin c \, dA = da - \cos C \, db - \cos B \, dc.$$

Sous cette forme classique, ainsi que dans les deux équations pareilles donnant  $dB$  et  $dC$ , on doit, par la pensée, remplacer au deuxième membre les cosinus des angles par leurs valeurs explicites (1) en  $a, b, c$ .

Quant à  $\frac{\sin A}{\sin a}$ , valeur commune des rapports de la relation des sinus, pour avoir son expression symétrique et explicite en  $a, b, c$ , il suffit de multiplier entre eux  $2 \cos^2 \frac{A}{2}$  et  $2 \sin^2 \frac{A}{2}$  donnés par les formules de Borda [celles-ci s'obtiennent en faisant la somme, puis la différence membre de la relation (1) avec l'identité  $1 = 1$ ]. Posant  $2s = a + b + c$ , on trouve

$$\begin{aligned} (3) \quad \frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} &= \frac{1}{\sin^2 a} 4 \sin^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{A}{2} \\ &= \frac{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c} \\ &= \left( \frac{\Omega}{\sin a \sin b \sin c} \right)^2. \end{aligned}$$

en posant

$$(4) \quad \Omega^2 = \sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c),$$

$\Omega$  ainsi défini (4) explicitement au signe près, le problème proposé est résolu par le système des trois équations (5) suivantes, jointes à (1) et (4) :

$$(5) \quad \begin{cases} \Omega dA = \sin a (\alpha - \beta \cos C - \gamma \cos B), \\ \Omega dB = \sin b (\beta - \gamma \cos A - \alpha \cos C), \\ \Omega dC = \sin c (\gamma - \alpha \cos B - \beta \cos A). \end{cases}$$

Les transformations bien connues qui viennent de donner cette solution résoudraient aussi, par les propriétés du triangle polaire, le problème, sans analogue en trigonométrie rectiligne, étant donnés les trois angles et leurs erreurs de mesure, de déterminer les *côtés* du triangle sphérique avec l'erreur moyenne qui les affecte (les transformées des formules de Borda donnant les côtés).

L'utilisation *pratique* des formules (5) suppose qu'on résolve au préalable, au moins approximativement, le triangle, pour avoir  $dA$ ,  $dB$ ,  $dC$  : les formules de résolution de Borda donneront le calcul de  $\Omega$  tout préparé. Si l'on se passe de  $\Omega$ , connaissant  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , c'est la formule (2) qu'on appliquera.

L'énoncé est muet sur les erreurs relatives, ce qui simplifie la discussion. Si l'un des côtés  $a$  a son sinus infiniment petit ( $a$  voisin de 0 ou de  $\pi$ ), on sait géométriquement que  $\sin A$  l'est aussi, ainsi que  $b - c$ . On est alors mal éclairé par les formules (5), ce qui est naturel puisqu'une inconnue  $A$  (ou plutôt  $\sin A$ ) tombe au rang de grandeur des erreurs; seules des erreurs relatives bien spécifiées préciseraient le problème.

Et même alors, le cas des trois côtés infiniment petits, le plus intéressant en Géodésie, se ramenant, par la méthode de Legendre, à un triangle rectiligne ayant pour angles les dièdres corrigés du tiers de l'excès sphérique, la question fait retour à la trigonométrie rectiligne.

## 592.

( 1861, p. 216; 1916 p. 519.)

*Soit un cylindre circonscrit à une surface de révolution; de chaque point de la ligne de contact, on abaisse des perpendiculaires sur l'axe; on obtient une surface gauche; circonscrivons à cette surface un second cylindre;*

*compant les deux cylindres par un plan, la section du second cylindre est la développée de la section du premier cylindre.*

M. DUNESME.

SOLUTION

Par M. M. FAUCHEUX.

Le théorème énoncé sous cette forme générale est évidemment faux; s'il est vrai pour un plan particulier, il n'est pas vrai pour un plan quelconque. Nous allons le vérifier dans le cas où le deuxième cylindre a ses génératrices parallèles à celles du premier, les deux cylindres étant coupés par un plan perpendiculaire à l'axe de la surface de révolution.

Prenons cet axe pour axe des  $z$ ; pour plan des  $xz$  un plan parallèle à la direction des génératrices. Soient

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad z = f(\rho)$$

les équations de la surface de révolution. Soient  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  les cosinus directeurs des génératrices.

Des calculs simples donnent pour la courbe de contact

$$\gamma = \alpha f'(\rho) \cos \theta,$$

et pour la trace du plan tangent le long de cette courbe sur le plan des  $xy$

$$(1) \quad X \cos \theta + y \sin \theta + \frac{f(\rho)}{f'(\rho)} = \rho = 0.$$

D'autre part, la surface gauche a pour équations

$$x = x, \quad y = x \tan \theta, \quad z = f(\rho),$$

$\rho$  et  $\theta$  étant liés par la même relation que plus haut.

De nouveaux calculs montrent que le long de la courbe de contact on a

$$x = \frac{\gamma \tan^2 \theta}{df''(\rho)}$$

et que la trace du plan tangent a pour équation

$$(2) \quad X \sin \theta - Y \cos \theta + \frac{z}{\gamma} \sin \theta f(\rho).$$

L'équation (2) représente une droite perpendiculaire à la droite (1) et est précisément celle à laquelle on parvient en différentiant (1) par rapport aux paramètres qui y figurent; donc la droite (2) qui est tangente à la section du second

cylindre est normale à l'enveloppe de (1), c'est-à-dire à la section du premier cylindre, ce qui démontre la proposition.

## 598.

( 18-1, p. 216. )

*Pour quelle longitude  $\odot$  du Soleil le temps que son disque met à traverser le méridien est-il ou maximum ou minimum?*

DUNESME.

## SOLUTION ET BIBLIOGRAPHIE

Par M. H. DE MONTILLE.

Il y a longtemps que le Recueil didactique intitulé *Exercices astronomiques* (1889, édit. Hermann, p. 297), par L.-J. Gruy, directeur de l'Observatoire à Besançon, a range et résolu cet exercice comme question courante d'astronomie sphérique.

En appelant, avec cet auteur,  $\odot$  la déclinaison du Soleil par rapport à l'équateur vrai,  $\mathcal{A}$  son ascension droite vraie,  $d\mathcal{A}$  la variation de  $\mathcal{A}$  pour une heure de temps moyen,  $r$  le rayon vecteur de l'orbite terrestre (mesuré avec l'unité astronomique très voisine du vecteur moyen),  $\Delta_0$  le diamètre apparent du Soleil à l'unité astronomique de distance,  $\theta_s$  la durée sidérale, en secondes, du passage du *demi*-diamètre, et  $m$  une constante, l'auteur établit d'abord, à l'exercice 126, que  $\theta_s$  s'exprime par  $\Delta \sec \odot \frac{1}{1-\mu}$ ,  $\Delta$  étant le diamètre angulaire au moment de l'observation. Cela résulte avec évidence, si l'on met à part le facteur  $\frac{1}{1-\mu}$ , de la considération du triangle sphérique formé, pour l'observateur, par la trace de l'axe des pôles géographiques sur la sphère céleste, le centre du Soleil et un point de contact méridien. D'ailleurs  $\mu$  est la dérivée  $\frac{d\mathcal{A}}{dt}$  de  $\mathcal{A}$  par rapport au temps.

À l'exercice 127, la relation prend la forme

$$(M) \quad \theta_s = \frac{\Delta_0}{15} \frac{1}{r \cos \odot} \left( 1 + \frac{m}{r \cos \odot} \right),$$

qui montre que la durée du passage du disque est :

- 1<sup>o</sup> *maxima* quand  $r \cos \odot$  est *minimum*;
- 2<sup>o</sup> *minima* quand  $r \cos \odot$  est *maximum*.

( 193 )

La constante  $m$  est  $m = \frac{\pi a^2 \sqrt{1 - e^2} \cos I}{12 \times 3600 \times 366,2422}$  ( $a$  est le demi-grand axe de l'orbite terrestre,  $e$  son excentricité actuelle,  $I$  l'obliquité vraie de l'écliptique). Et  $2\theta_s$  représente alors la durée correspondante du passage.

*Remarques.* — I. Ici s'arrêtent les indications succinctes de cet auteur.

L'astronome, vu l'impossibilité d'exprimer en termes finis, non seulement les racines en  $\odot$  de l'équation  $\frac{\partial}{\partial t}(r \cos \odot) = 0$ , mais même toutes les équations où le temps serait inconnue explicite, n'a admis évidemment, pour obtenir l'inconnue, soit  $\odot$ , soit le temps  $t$ , que les méthodes d'approximation usuelles en astronomie.

Il a déjà fait une approximation, très légitime, en remplaçant, dans ce qui précède,  $\frac{1 - \mu}{1}$  par  $1 + \mu_1$ .

II. *Équations de résolution.* — Nous arriverions aux équations de résolution de la manière suivante (en prenant la notation  $\delta$  plus usuelle que  $\odot$ ) :

$$(1) \quad (r \cos \delta)'_t = r'_t \cos \delta - r \sin \delta \delta'_t = 0;$$

$$(2) \quad r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\odot - \varpi)},$$

$\varpi$  étant la longitude du périégée dans l'orbite apparente du Soleil.

Or la relation des sinus appliquée au triangle-rectangle que forment la longitude, l'ascension droite et la déclinaison donne :

$$(3) \quad \sin \delta = \sin \odot \sin I;$$

donc

$$(4) \quad \cos \delta \delta'_t = \sin I \cos \odot \odot'_t.$$

Et la relation (1) devient, en tenant compte successivement de (4), de (3) :

$$\frac{r'_t}{r} t \cos^2 \delta = \sin \delta \sin I \cos \odot \odot'_t = \frac{1}{2} \sin^2 I \sin 2 \odot \odot'_t.$$

Or, la différentiation logarithmique de (2) donnera

$$(2') \quad \frac{r'}{r} = \frac{e \sin(\odot - \varpi)}{1 + e \cos(\odot - \varpi)},$$

d'où

$$(5) \quad e \sin(\odot - \varpi) (1 - \sin^2 I \sin^2 \odot) \\ = \frac{1}{2} \sin^2 I \sin 2\odot [1 + e \cos(\odot - \varpi)] \odot'.$$

On peut, dans l'équation finale (5), exprimer  $\odot'$  par la dérivée d'une série de Lagrange, bien connue, donnant l'anomalie vraie en fonction du temps, et résoudre, comme il est dit ci-dessus, par approximations successives, soit par la méthode de Newton, soit par celle de Gauss, l'équation transcendante (5). Il est évident, en effet, que la dérivée de l'anomalie vraie par rapport au temps est identique à celle de la longitude écliptique vraie.

En définitive, on sera amené, pour une année entière, à calculer deux *maxima* de  $\theta$ , presque confondus avec les solstices, et deux *minima*, l'un suivant de près d'une semaine l'équinoxe de mars, l'autre précédent d'autant l'équinoxe de septembre.

Partant de cette approximation presque évidente avec la formule (M), ou de l'intervalle un peu plus resserré, de la *Connaissance des Temps*, on aboutira, quand les dernières valeurs se confondront, à quatre racines en  $t$  qui supposent le mouvement rigoureusement elliptique ou képlérien. Et si l'on veut tenir compte des perturbations, on en corrigera  $r$ ,  $\odot$ ,  $\odot'$ ,  $\delta$  dans les équations (4) et (2)', ce qui conduit à une équation (5) rectifiée.

En dernière approximation, on a quatre racines  $t_1, t_2, t_3, t_4$  en temps. On en déduira, par les éphémérides, les valeurs de  $\odot$  toutes affectées des effets d'aberration en angle et en temps, de la précession et de la nutation.

Il est bien évident que, à chacune des époques rigoureuses trouvées correspond un méridien véritable, lieu des points terrestres qui verront précisément le passage à l'instant du maximum ou du minimum.

Toutefois, la durée du passage  $2 \frac{\Delta_0}{15} \frac{1}{r \cos \delta} \left( 1 + \frac{m}{r \cos \delta} \right)$  n'a été exprimée que pour une observation géocentrique. La durée locale en un lieu doit être corrigée de la parallaxe en



déclinaison. Alors, en appelant  $L$  la latitude géocentrique réduite du lieu,  $\varpi$  la parallaxe du Soleil et  $\rho$  son rayon équatorial, on appliquerait la correction usuelle  $\frac{\rho}{r} \varpi \sin(\delta - L)$ .

En ce qui concerne l'observation qui ne change pas de place, les zones terrestres qui ont, par moments, deux passages du Soleil en 24 heures (régions polaires) resserrent au maximum l'intervalle entre la date rigoureuse calculée et la date réelle d'un passage méridien pour l'observatoire fixe.

## 617.

(1883, p. 156 ; 1916, p. 519).

**THÉORÈME.** — Soit  $w = u + iv$  une fonction monodrome et monogène : une courbe fermée d'équation  $f(x, y) = 0$ , dans le plan horizontal des indices de  $z$  : un cylindre vertical qui a  $f(x, y)$  pour base ; deux plans verticaux  $P$  et  $P'$  rectangulaires. Supposons que  $w$  ne devienne ni nulle ni infinie dans l'intérieur de  $f(x, y) = 0$ , et que l'indice de  $z$  parcoure  $f(x, y)$ . Sur chaque génératrice du cylindre portons, à partir de la base, les longueurs  $u$  et  $v$  correspondantes ; nous obtiendrons ainsi deux courbes  $U$  et  $V$ . L'aire de la projection de  $U$  ou de  $V$  sur le plan  $P$  est égale à l'aire de la projection de  $V$  ou de  $U$  sur  $P$ .

DEWULF.

## SOLUTION

Par M. H. DE MONTILLE.

Sur la surface du cylindre ( $C$ ) envisagé, considérons un élément d'aire courbe, compris entre la courbe de base ( $B$ ), deux génératrices infiniment voisines, et les arcs de chacune des courbes ( $U$ ) et ( $V$ ) tracés sur ( $C$ ). Soit  $ds$  l'élément d'arc de courbe de base ( $B$ ) pour des accroissements élémentaires  $dx$  et  $dy$  : les aires infinitésimales découpées sur ( $C$ ) ont respectivement pour parties principales  $Uds$  et  $Vds$ .

Or, en menant les plans  $P$  et  $P'$  par l'origine  $O$ , on ne perdra rien sur la généralité des conclusions concernant les projections des aires sur ces plans.

Donnons donc à ceux-ci, ainsi qu'à leurs traces sur le plan des  $xy$ , les équations suivantes :

$$(1) \quad \begin{cases} (P) & X \equiv x \cos \omega + y \sin \omega, \\ (P') & Y \equiv x \sin \omega - y \cos \omega; \end{cases}$$

Les signes  $\equiv$  d'identité ci-dessus définissent une transformation de coordonnées par rapport aux plans (P) et (P'),  $xOy$  : écrivons-la comme il suit :

$$(2) \quad \begin{cases} x = X \cos \omega - Y \sin \omega, \\ dx = \cos \omega dX - \sin \omega dY, \\ y = X \sin \omega + Y \cos \omega, \\ dy = \sin \omega dX + \cos \omega dY. \end{cases}$$

Cette substitution linéaire orthogonale  $\left[ \overline{(\text{module})}^2 = 1 \right]$  est sans effet sur la valeur de l'élément d'arc de courbe

$$ds = \sqrt{dX^2 + dY^2} = dS,$$

qui a un rôle d'invariant, de même que le module  $x^2 + y^2$  de  $z$  ou de  $x + yi$ , qui devient le module  $X^2 + Y^2$  de  $X + Yi = Z$ . Il y a uniquement une différence d'argument, de  $\omega$ , entre  $z = x + yi$  et  $Z = X + Yi$ ; en effet, les relations (2) donnent :

$$(3) \quad x + yi = (\cos \omega + i \sin \omega)(X + Yi) = e^{i\omega}(X + Yi);$$

cela résulte de ce que les axes ont tourné de  $\omega$ .

Je dis maintenant que la fonction  $\omega$ , monogène en  $x$  et  $y$ , se transforme en une fonction  $W$  monogène en  $X$  et  $Y$ . En effet, la monogénéité de  $\omega$  signifiant que  $\omega$  n'est fonction que de la combinaison  $x + yi$ , on voit que sa transformée  $W$  n'est aussi fonction que de la transformée de  $x + yi$ , c'est-à-dire de  $e^{i\omega}(X + Yi)$  en vertu de l'égalité (2). En définitive,  $e^{i\omega}$  étant constant,  $W$  n'est fonction que de  $X + Yi$ ;  $W$  est donc monogène en  $X, Y$ .

Écrivons alors  $W$  sous la forme  $W = K + Li$ ; et affectons de l'indice 1 toutes les variables et fonctions se rapportant à une même affixe considérée :  $x_1, y_1, z_1; X_1, Y_1, Z_1$ , etc. La transformation (2) entraîne

$$W_1 \doteq v_1; \quad K_1 = U_1; \quad L_1 = V_1.$$

Or, l'aire élémentaire  $U_1 ds$  a pour projection

$$U_1 ds \frac{dX}{dS} = U_1 dX$$

sur le plan des  $X$ , puisque  $ds = dS$ ; cette projection vaut

donc  $K_1 dX$ . On verra de même que  $L_1 dY$  est la projection de l'aire  $V_1 ds$  sur le plan des  $Y$ .

Et pour un contour fini allant, sur la base (B) de  $z_0$  à  $z$ , ou de  $Z_0$  à  $Z$ , les aires projetées correspondantes seront

$$(4) \quad \int_{z_0}^z K dX \quad \text{et} \quad \int_{z_0}^z L dY.$$

Prenons la dérivée de chacune de ces expressions d'aires par rapport à la variable qui donne son nom à l'axe bordant l'aire. En différenciant sous le signe d'intégration, ces dérivées seront

$$(4)' \quad \int_{z_0}^z \frac{\partial K}{\partial X} dX \quad \text{et} \quad \int_{z_0}^z \frac{\partial L}{\partial Y} dY.$$

Or, les deux dérivées partielles sous le signe  $\int$  sont précisément égales, leur égalité exprimant une des deux conditions de monogénéité de  $W = K + Li$ , qu'on vient de montrer monogène. Par suite, les dérivées (4)' étant égales, leurs fonctions primitives (4) ne diffèrent que par une constante, cette constante est d'ailleurs nulle, nos aires projetées étant nulles à la génératrice initiale.

La deuxième condition de monogénéité de  $W$  prouverait l'égalité, au signe près, des aires obtenues en intervertissant les plans sur lesquels on projette.

Autre solution par M. M. FAUCHEUX.

### 693.

(1864, p. 119.)

*Trouver l'équation des courbes parallèles aux ovales de Descartes.*

STREBOR.

SOLUTION

PAR M. H. BROCARD.

Cette question de *Strebtor* (William Roberts), proposée en 1864, paraît remonter au moins à l'année 1863. Sa solution analytique entraînerait certainement à une très grande complication, et il est parfaitement légitime de croire que W. Roberts en avait rencontré une solution géométrique.

Cette induction est singulièrement corroborée par l'étude parue ici *Sur les surfaces d'égalé pente*, par M. A. Myller

(1917, p. 413-420), dont la conclusion donne, en effet, pour la solution désirée, l'élégante proposition que les courbes parallèles aux ovales de Descartes admettent une triple génération par cercles dont les centres décrivent un cercle fixe et dont les rayons sont proportionnels aux distances des centres à un autre cercle fixe.

Si ce résultat avait été déjà au moins partiellement obtenu par W. Roberts, cela aura pu lui suggérer la question 693, puisqu'elle paraît ainsi abordable par l'analyse

Je n'ai pas poussé plus loin cette investigation, mais il est à croire que cette remarque donnera des facilités nouvelles pour y parvenir depuis 54 ans que la question 693 a été proposée.

### 880.

(1868, p. 239; 1917, p. 158.)

*P étant le produit des entiers inférieurs et premiers au nombre N, la différence  $P - 1$  est divisible par N si N n'est ni premier, ni le double d'un nombre premier, ni une puissance d'un nombre premier impair, ni le double d'une telle puissance.*

LIONNET.

### SOLUTION

Par M. H. DE MONTILLE.

Serret, dans son *Traité d'Algèbre supérieure*, énonce et démontre ce théorème, sous le titre général de théorème de Wilson généralisé, sans mentionner d'attribution de priorité ou de découverte. C'est au Tome II (§ 296, p. 37) qu'on lit cet énoncé, dont le n° 880 n'est qu'une partie :

Si P désigne le produit des  $\rho(M)$  nombres premiers avec M et non supérieurs à M, on a  $P \equiv \pm 1 \pmod{M}$ , c'est-à-dire que P donne le même reste de division par M que  $\pm 1$ , savoir :

$P \equiv -1$ , si M est égal à une puissance d'un nombre impair, ou égal au double d'une telle puissance, ou égal à 4; et  $P \equiv +1 \pmod{M}$ . — c'est l'énoncé 880 — dans tous les autres cas.

La démonstration que donne Serret, débarrassée de la notation et du langage des congruences, est très élémentaire. Je la résume, avec ses notations simplifiées :

Soient  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  les  $\varphi(M)$  nombres premiers avec M et

non supérieurs à  $M$  (et  $a$  un nombre arbitraire de cette suite). Considérons les restes des divisions, par  $M$ , de leurs produits par un nombre  $a$  :  $ax, a\beta, a\gamma, \dots$ . Ces restes reproduiront dans un certain ordre les nombres  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  eux-mêmes. En particulier, 1 et  $M-1$  y figurent. Considérons le produit  $ax$  qui donne pour reste 1 ; Serret appelle  $a$  et  $x$  des *associés* du premier genre, si  $a \neq x$ . Si  $a = x$ , avec 1 pour reste du produit  $a^2 = ax$ , on voit que  $-1$  (ou  $M-1$  qui lui est équivalent) est le reste de  $a(M-a)$  ;  $a$  et  $a$  sont alors associés du second genre, et sont alors racines conjuguées de l'équation  $x^2 - 1 = m^e$  de  $M$  : elles forment  $\mu$  couples.

Or, le produit de tous les nombres du premier genre est de la forme  $m^e M + 1$ .

Celui de tous les nombres du second genre est  $m^e M + (-1)^\nu$ .

Donc  $P - 1$ , si  $\mu$  est pair, est multiple de  $M$ .

Or, dans les seules hypothèses que nous laisse Lionnet pour résoudre en entiers  $x^2 - 1 = m^e$  de  $M$ , ou

$$(1) \quad (x-1)(x+1) = m^e \text{ de } M,$$

$M$  doit être de la forme  $a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n}$ ,  $n$  étant au moins égal à 2.

De plus, si  $a_1$  est 2 et  $\alpha_1 = 1$ , il faut, par hypothèse,  $n > 2$ . — Serret fait remarquer qu'il faut exclure, en plus,  $M$  égal à 4.

Il s'agit de montrer que, cela posé,  $\mu$  est pair : le raisonnement de Serret (t. II, § 292) se base sur ce que, d'après l'équation (1), le nombre des couples de valeurs conjuguées de  $x$  est le nombre de décompositions de  $M$  en deux facteurs  $A$  et  $B$  ayant au plus 2, pour plus grand commun diviseur :

1° Si le facteur 2 est absent, ce nombre est

$$1 + n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + \dots = 2^n = \mu.$$

2° Si  $a_1^{\alpha_1} = 2$ , la parité reste la même en ne considérant que les autres facteurs, et  $\mu$  est encore puissance de 2.

3° Si  $M = 2^k m$ ,  $m$  étant le type de nombres de la première hypothèse, on ne change pas la parité, en comptant les décompositions de  $m$ , soit  $2^\nu$  ; puis, en affectant les deux facteurs de  $m$  des facteurs  $2^{k-1}, 2$  ou  $2, 2^{k-1}$ . Cette dernière opération n'ajoute rien si  $k = 2$ . Si, de plus,  $m = 1$ , c'est le cas

de  $M = 4$ , où  $\mu$  est impair, exception que mentionne Serret. Si  $m$ , premier avec 2, est quelconque et  $K > 2$ ,  $\mu$  est pair.

## 1446.

(1883, p. 210; 1916, p. 39.)

*Les nombres de Bernoulli et d'Euler, définis symboliquement par les relations*

$$\begin{aligned}(B + 1)^p - B^p &= 0, \\ (\varepsilon + 1)^p + (\varepsilon - 1)^p &= 0,\end{aligned}$$

*satisfont aux relations symboliques*

$$\begin{aligned}(2B + 1)^p &= (2 - 2^p) B_p, \\ (4B + 1)^p &= (2 - 2^p) B_p - p\varepsilon_{p-1}, \\ (4B + 3)^p &= (2 - 2^p) B_p + p\varepsilon_{p-1}.\end{aligned}$$

E. CESARO.

## SOLUTION

Par M. L. POLI.

On peut voir dans Lucas (*Théorie des nombres*, p. 242) la relation

$$(Bx)^p + (Bx + 1)^p + \dots + (Bx + x - 1)^p = x B_p.$$

On en déduit pour  $x = 2$

$$(1) \quad (2B + 1)^p = (2 - 2^p) B_p;$$

puis, pour  $x = 4$ ,

$$4^p B_p + (4B + 1)^p + 2^p (2B + 1)^p + (4B + 3)^p = 4 B_p;$$

d'où, à cause de (1),

$$(2) \quad (4B + 1)^p + (4B + 3)^p = 2(2 - 2^p) B_p.$$

D'autre part, on a (*Ibid.*, p. 258 et p. 251)

$$p\varepsilon_{p-1} = (2B + 1)^p - (4B + 1)^p$$

qui, avec (1) et (2), donnent les deux autres relations demandées.

