

R. GOORMAGHTIGH

Sur un problème de géométrie infinitésimale

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 19 (1919), p. 177-184

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__177_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1919, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

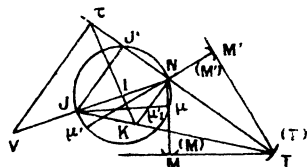
[O'2]

SUR UN PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE;

PAR M. R. GOORMAGHTIGH.

1. En chaque point M d'une courbe (M) prenons sur la tangente à la courbe un segment variable MT égal à une fonction r de l'angle de contingence φ de (M) au point M ; proposons-nous de construire la normale et le centre de courbure τ de la courbe (T) , lieu de T , au point T .

Soient μ, μ_1 les deux premiers centres de courbure de (M) en M ; r', r'' les deux premières dérivées de r par rapport à φ . La construction de la normale en T à la courbe (T) s'obtient immédiatement en observant que, si N désigne l'intersection de $T\tau$ avec $M\mu$, le segment μN est égal, d'après une relation connue ⁽¹⁾, à la dérivée de r par rapport à φ .



Pour déterminer le point τ , considérons la déformation du triangle MTN . Soit J le point où la normale en N à l'élément décrit par ce point rencontre $\mu\mu_1$; le segment $\mu_1 J$ est égal à r'' . On a, d'autre part, en dési-

⁽¹⁾ MANNHEIM, *Principes et développements de Géométrie cinématique*, p. 44.

gnant par V l'intersection de NJ avec la perpendiculaire élevée en τ sur $T\tau$,

$$\frac{d(M)}{d(T)} = \frac{\overline{M\mu}}{\overline{TN}}, \quad \frac{d(T)}{d(N)} = \frac{\overline{T\tau}}{\overline{NV}}, \quad \frac{d(N)}{d(M)} = \frac{\overline{NJ}}{\overline{M\mu}}.$$

Par suite, si J' est la projection de J sur TN, on a

$$\frac{\overline{T\tau}}{\overline{TN}} = \frac{\overline{NV}}{\overline{NJ}} = \frac{\overline{N\tau}}{\overline{NJ'}}$$

ou

$$\frac{1}{\overline{N\tau}} = \frac{1}{\overline{NT}} + \frac{1}{\overline{NJ'}}.$$

On déduit de ce qui précède les constructions suivantes pour la normale et le centre de courbure de la courbe (T) au point T :

Le point N obtenu en portant sur $M\mu$ un segment $\overline{\mu N}$ égal à r' appartient à la normale cherchée. Soit J le point obtenu en portant sur $\overline{\mu\mu_1}$ le segment $\overline{\mu_1 J}$ égal à r'' ; le centre de courbure cherché τ est le milieu du segment compris entre N et le conjugué harmonique de N par rapport à T et la projection de J sur TN ⁽¹⁾.

Ayant déterminé le point J sur $\mu\mu_1$, on peut aussi en déduire τ par la construction suivante :

Soit K le point où JT rencontre la perpendiculaire élevée en N sur TN; la droite qui joint K au milieu I de NJ passe par le centre de courbure cherché.

2. *Courbes tractrices.* — Si r est une constante,

⁽¹⁾ Dans cette construction, il y a lieu de tenir compte des signes de r' et r'' .

(T) est une courbe équitangentielle de (M), et (M) une courbe tractrice de (T); on retrouve facilement, au moyen de ce qui précède, la construction donnée par M. d'Ocagne pour obtenir le deuxième centre de courbure μ_1 d'une courbe tractrice (M) d'une courbe (T) quand on connaît le centre de courbure τ de (T) en T ⁽¹⁾.

3. *Conchoïdes*. — La tangente MT à la courbe (M) coupant une courbe (T) en T, considérons le lieu (T₁) du point T₁ obtenu en prolongeant $\overline{MT}$ d'un segment constant $\overline{TT_1}$; la définition du lieu (T₁) généralise celle des conchoïdes. La construction ⁽²⁾ du centre de courbure de (T₁) indiquée dans les *Nouvelles Annales*, 1917, p. 434, découle de la construction générale trouvée ci-dessus.

4. *Courbes isoptiques*. — Menons par le point T une droite faisant avec MT un angle constant; cette droite touche son enveloppe (M') au point M', projection de N sur cette droite; la courbe (T) est une courbe isoptique de (M) et (M'). Soit μ' le centre de courbure de (M') en M'. La droite NJ est la normale de la courbe décrite par N; or cette courbe est une isoptique des développées de (M) et (M'); par conséquent, la perpendiculaire élevée en μ' sur M' μ' passe

⁽¹⁾ Les propriétés infinitésimales des courbes *équicoïles* (*Intermédiaire des Mathématiciens*, 1915, p. 105, 177, 272; 1916, p. 151) se déduisent immédiatement de celles des tractrices.

⁽²⁾ On peut déduire de cette construction celle du centre de courbure de la *conchoïde de Dürer*. Elle permet en outre de retrouver ce théorème, dû à Rivals :

Les centres de courbure des éléments décrits simultanément par des points marqués sur une droite qui se déplace dans un plan appartiennent à une conique.

par J. On retrouve donc cette construction connue du centre de courbure τ de l'isoptique (T) de deux courbes (M) et (M') (1) :

Soit N l'intersection de $M\mu$, $M'\mu'$; le cercle $N\mu\mu'$ coupe TN en J'. Le centre de courbure τ est le milieu du segment compris entre N et le conjugué harmonique de N par rapport à T et J'.

5. *Développées intermédiaires.* — Portons sur la tangente à (M) en M vers l'origine des arcs un segment MM₁ égal à l'arc de (M) en M; le lieu (M₁) de M₁ est une développante de (M) et le lieu du point T qui divise $\overline{M_1M}$ dans le rapport constant λ est la développée intermédiaire d'indice λ de (M₁).

La normale à la développée intermédiaire (T) passe par le point N qui divise le deuxième rayon de courbure de (M₁) dans le rapport λ . Pour obtenir le centre de courbure τ de (T), on projette en J' sur la normale à (T) le point qui divise le troisième rayon de courbure de (M₁) dans le rapport λ ; τ est le milieu du segment compris entre N et le conjugué harmonique de ce point par rapport à T et J' (2).

6. *Courbes tangentielles.* — Sur la tangente au point M d'une courbe (M) on porte un segment MT tel que sa projection sur une droite fixe Δ soit constante; le lieu (T) de T est une courbe tangentielle de (M) (3).

(1) MANNHEIM, *Principes et développements de Géométrie cinématique*, p. 33.

(2) Voir L. BRAUDE, *Les coordonnées intrinsèques* (Scientia, n° 34, p. 57); ce résultat y est obtenu analytiquement.

(3) Au sujet de cette transformation, voir HOCHHEIM, *Tangentalkurven der Kegelschnitte* (Zeitschrift für Math. u. Phys., 1870); RETALI, *Sopra una corrispondenza [m, n]* (Rendiconti Ist. Lomb., 1899).

Si les parallèles menées par M à Δ et par T à M_{μ} se coupent en L, la normale en T à (T) est parallèle à μL .

La perpendiculaire élevée en L sur ML rencontre MT en P; soient Q le symétrique de T par rapport à P, J celui de Q par rapport au milieu de M_{μ_1} , N l'intersection de la normale à (T) avec M_{μ} . Le centre de courbure est le milieu du segment compris entre N et le conjugué harmonique de N par rapport à T et la projection de J sur TN.

Réciproquement, connaissant la normale et le centre de courbure de la courbe (T) en T, on peut obtenir les deux premiers centres de courbure μ et μ_1 de la courbe (M) en M. En particulier, quand on considère une logarithmique (M) et son asymptote (T), on obtient des constructions simples pour les deux premiers centres de courbure de la logarithmique.

7. Courbes définies par leur équation polaire. — Si l'on suppose que la courbe (M) se réduise à un point fixe M, le problème général revient à la construction du centre de courbure des courbes définies par leur équation polaire $r = f(\varphi)$.

1. Radiales. — Par un point fixe M du plan, on mène des segments MT équipollents aux rayons de courbure d'une courbe Γ ; le lieu (T) du point T est la radiale de Γ .

Par le point N on mène les segments MN, MJ équipollents aux deuxième et troisième rayons de courbure de Γ ; TN est la normale à la radiale en T. Soit K le point où la perpendiculaire élevée en N sur TN rencontre MT: la droite qui joint K au

milieu de NJ passe par le centre de courbure de la radiale.

β . *Centre de courbure des spirales de degrés quelconques $r^k = a^k \varphi$:*

La normale en T à la spirale rencontre en N la perpendiculaire élevée en M sur MT, celle élevée en N sur NT coupe MT en K; on prend sur $\overline{MK}$ le segment $\overline{MJ}$ égal à $(1-k)\overline{MK}$; la droite qui joint K au milieu de NJ passe par le centre de courbure de la spirale (¹).

γ . *Rosaces.* — Dans le cas d'une rosace d'indice n , le point J s'obtient en prenant sur $\overline{MT}$ le segment $\overline{MJ} = n^2 \overline{MT}$.

δ . La méthode générale permet de déduire la construction du centre de courbure des courbes $r = f(n\varphi)$ de celle du centre de courbure de la courbe $r = f(\varphi)$; on pourra, en particulier, obtenir une construction de la normale et du centre de courbure des courbes à n ventres en observant que ces courbes sont les transformées des coniques qui ont le pôle pour foyer et l'axe polaire pour axe focal.

8. *Une méthode de généralisation.* — Revenons aux considérations générales du paragraphe 1. Par un point fixe M_0 du plan, menons un segment $M_0 T_0$ équipollent à MT, et considérons le lieu (T_0) du point T_0 .

(¹) Dans le cas de la *spirale de Fermat*, J est le symétrique de K par rapport à M. Pour la *spirale d'Archimède*, le centre de courbure appartient à la droite qui joint K au milieu de MN. Dans le cas de la *spirale hyperbolique*, la perpendiculaire élevée en K sur Th passe par le centre de courbure; on retrouve donc une construction indiquée par M. Balitrand (*Nouvelles Annales*, 1916, p. 223).

Si l'on connaît la normale et le centre de courbure τ de (T) en T , on peut en déduire la normale et le centre de courbure de (T_0) en T_0 , et réciproquement. Soit, en effet, N_0 le point où la normale en T_0 à (T_0) coupe la perpendiculaire élevée en M_0 sur M_0T_0 ; le segment $\overline{M_0N_0}$ est égal à $\overline{\mu N}$; de même, si J_0 désigne le point analogue à J , on a

$$\overline{M_0J_0} = \overline{\mu_1 J}.$$

Cela posé, envisageons, par exemple, la transformation par inversion qui fait correspondre au lieu (T_0) de T_0 le lieu (T'_0) du point T'_0 tel que

$$M_0T_0 \cdot M_0T'_0 = k^2;$$

considérons alors, plus généralement, la transformation qui fait correspondre au lieu (T) du point T le lieu (T') du point T' de MT tel que

$$MT \cdot MT' = k^2.$$

Connaissant le centre de courbure τ de (T) en T , on peut en déduire le centre de courbure τ_0 de (T_0) en T_0 ; d'après une propriété connue, $M_0\tau_0$ passe par le centre de courbure τ'_0 de (T'_0) en T'_0 ; connaissant le point τ'_0 , on en déduit le centre de courbure τ' de (T') en T' . On simplifie les constructions en faisant coïncider, pour chaque position de M sur la courbe (M) , le point M_0 avec le point M .

La méthode que nous venons d'indiquer pour le cas particulier de l'inversion a une portée tout à fait générale : la tangente en un point M de la courbe (M) coupant n courbes $(T_1), (T_2), \dots, (T_n)$ en $T_1, T_2, \dots, T_n$, considérons le lieu (T') du point T' de MT tel que

$$\overline{MT'} = f(\overline{MT_1}, \overline{MT_2}, \dots, \overline{MT_n}).$$

On pourra toujours résoudre le problème de la construction de la normale et du centre de courbure de la courbe (T') quand on en connaît une solution pour le cas particulier où la courbe (M) se réduit à un point.