

M.-F. EGAN

Sur quelques intégrales trigonométriques

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 19 (1919), p. 140-145

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__140_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1919, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[C2h]

SUR QUELQUES INTÉGRALES TRIGONOMÉTRIQUES;

PAR M. M.-F. EGAN.

1. Pour mettre en évidence le caractère élémentaire de ce qui va suivre, je rappelle ici la démonstration

que j'ai donnée ailleurs (1) de la formule classique

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

On constate sans peine que l'intégrale existe et qu'elle est la limite de l'intégrale

$$\int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{x^2} dx = \frac{1}{n} I_n,$$

lorsque l'entier positif n tend vers l'infini.

Or, I_n est comprise entre

$$S_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x} dx = n \frac{\pi}{2}$$

et

$$\begin{aligned} C_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 nx \cot^2 x dx \\ &= S_n - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 nx dx \\ &= n \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

d'où la limite cherchée.

2. On a donc, r étant un entier positif,

$$(1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos rx}{x^2} dx = r\pi = \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos rx}{1 - \cos x} dx.$$

Soit $\varphi(x)$ un polynôme en $\cos x$, s'annulant pour $x = 0$; on peut écrire

$$\varphi(x) = \sum_r a_r (1 - \cos rx),$$

d'où

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x) dx}{x^2} = \int_0^{\pi} \frac{\varphi(x)}{1 - \cos x} dx.$$

(1) *Mathematical Gazette*, 1916.

Intégrons le second membre par parties. L'origine est un zéro d'ordre 2 pour $\varphi(x)$, donc le terme intégré s'annule aux limites, et il reste

$$(3) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx = \int_0^{\pi} \varphi'(x) \cot \frac{1}{2} x dx.$$

3. Ainsi, par exemple, si p et q sont des entiers positifs, dont q peut être nul, on a

$$\begin{aligned} F(p, q) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^{2p} x \cos^q x}{x^2} dx \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\sin^{2p} x \cos^q x}{1 - \cos x} dx \\ &= \int_0^{\pi} \sin^{2p-2} x (\cos^q x + \cos^{q+1} x) dx. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin^{2a} x \cos^{2b} x dx &= \frac{\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(b + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(a + b + 1)}, \\ \int_0^{\pi} \sin^{2a} x \cos^{2b+1} x dx &= 0, \end{aligned}$$

donc

$$(4) \quad F(p, 2m-1) = F(p, 2m) = \frac{\Gamma\left(p - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(m + p)}.$$

Soit encore

$$\varphi(x) = 1 - \cos^n x,$$

et appliquons la formule (3). On a (1)

$$\begin{aligned} C(n) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos^n x}{x^2} dx \\ &= n \int_0^{\pi} \cos^{n-1} x \sin x \cot \frac{1}{2} x dx \\ &= n \int_0^{\pi} (\cos^{n-1} x + \cos^n x) dx, \end{aligned}$$

(1) Pour cette intégrale, voir le travail de T. STEFAN, *Zeitschrift für Math. u. Phys.* (Schlömilch), Band VII, t. 1862, p. 356.

d'où

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{ll} C(n) = n \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} & (n \text{ pair}). \\ C(n) = n \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} & (n \text{ impair}). \end{array} \right.$$

Posons encore

$$\varphi(x) = p - \frac{\sin px}{\sin x}.$$

On a facilement

$$\varphi'(x) \cot \frac{1}{2}x + \frac{\varphi(x)}{1 - \cos x} = p \frac{1 - \cos px}{1 - \cos x} - \frac{\sin px}{\sin x},$$

d'où, par les identités (2) et (3),

$$\begin{aligned} G(p) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(p - \frac{\sin px}{\sin x} \right) \frac{dx}{x^2} \\ &= \frac{1}{2} p \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos px}{1 - \cos x} dx - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin px}{\sin x} dx \\ &= \frac{\pi}{2} p^2 - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin px}{\sin x} dx, \end{aligned}$$

on a donc

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{ll} G(p) = \frac{\pi}{2} p^2 & (p \text{ pair}), \\ G(p) = \frac{\pi}{2} (p^2 - 1) & (p \text{ impair}). \end{array} \right.$$

4. Mettons $px = y$ dans (6), il en vient

$$\Pi(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{\sin y}{p \sin \frac{y}{p}} \right) \frac{dy}{y^2} = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon}{p^2} \right),$$

ε ayant la valeur 0 ou 1 suivant le cas. On conjecture

qu'on doit avoir

$$(7) \quad \Pi = \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{\sin y}{y}\right) \frac{dy}{y^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Il n'est pas difficile de montrer que $\Pi - \Pi(p)$ tend vers zéro avec $1/p$, mais il est plus simple de déduire (7) de l'égalité

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \left[\frac{x - \sin x}{x^2} \right]_{\alpha}^{\beta} + 2 \int_{\alpha}^{\beta} \frac{x - \sin x}{x^3} dx,$$

en faisant tendre β et α vers ∞ et $-\infty$.

5. Jusqu'ici les nombres p, q, m, n sont supposés entiers. On peut lever cette restriction des formules (4) et (5), mais non pas de (6). Soit en effet $\varphi(x)$ une fonction paire, de période 2π , ayant une racine double à l'origine, et telle que la série

$$S(x) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{2\varphi(x)}{(x + 2r\pi)^2} = \frac{\varphi(x)}{1 - \cos x}$$

puisse s'intégrer terme à terme de 0 à 2π . On peut remplacer les deux dernières conditions, si l'on veut, par celle plus simple quoique plus restrictive que $\varphi(x) : x^2$ soit bornée. Alors

$$\varphi(2\pi - x) = \varphi(x - 2\pi) = \varphi(x),$$

d'où

$$(8) \quad \begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{\varphi(x)}{1 - \cos x} dx &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(x)}{1 - \cos x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} S(x) dx \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(x)}{(x + 2r\pi)^2} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que les identités (2) et (3) sont encore valables. En examinant les démonstrations de (4) et (5), on constate que p, q, m, n peuvent être des fractions positives à dénominateurs impairs. Il faut toutefois que $p \geq 1$ dans (4), et que $n \geq 1$ dans (5).

Wolstenholme (1) donne l'énoncé

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} f(\sin^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin^2 x) dx,$$

qui équivaut à (8).