

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 19
(1919), p. 116-118

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__116_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1919, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2313.

(1917, p. 279.)

L'équation d'une conique étant $f(x, y, z) = 0$, on pose

$$f_{11} = f(x_1, y_1, z_1),$$

$$f_{12} = \frac{1}{2}(x_2 f'_{x_1} + \dots).$$

(¹) *Loc. cit.*, p. 86.

Si un polygone de n côtés $M_1 M_2 \dots$ est circonscrit à la conique, on a

$$f_{11} \times \dots \times f_{nn} = (-1)^n f_{12} \times \dots \times f_{n1}.$$

G. FONTENÉ.

SOLUTION

Par M. L. MALOUÉ.

En écrivant que le point M_2 appartient au faisceau des tangentes issues de M_1 , on a

$$f_{11} f_{22} = f_{12}^2.$$

En multipliant membre à membre cette relation et les relations analogues, on trouve

$$f_{11} f_{22} \dots f_{nn} = \pm f_{12} f_{23} \dots f_{n1},$$

La relation indiquée est donc obtenue, au signe près.

Pour l'établir complètement, on peut procéder géométriquement, en démontrant le théorème suivant :

Quand un polygone est circonscrit à une conique, les points de contact qui sont extérieurs aux côtés correspondants sont en nombre pair.

On reconnaît en effet aisément que le choix du signe, dans la relation à démontrer, résulte immédiatement de cette proposition.

Quant à la proposition même, voici l'esquisse de sa démonstration : si l'on considère un polygone quelconque circonscrit à une ellipse et que, laissant fixe tous les côtés de ce polygone, à l'exception d'un seul, on fasse varier ce dernier côté en le laissant tangent à la courbe, on remarque que, chaque fois qu'il passe en coïncidence avec l'un des côtés fixes, le nombre des points de contact extérieurs ne varie pas, ou bien varie de deux unités dans un sens ou dans l'autre. Le nombre ne change donc pas de parité. Or on peut passer, au moyen de cette opération, d'un polygone convexe circonscrit à l'ellipse, polygone pour lequel le théorème est vérifié, à un polygone quelconque. La proposition est donc établie pour l'ellipse.

On l'étend ensuite par projection à l'hyperbole, en remarquant que si des points sont marqués sur les côtés d'un polygone, une projection conique n'altère pas la parité du nombre des points qui sont extérieurs aux côtés correspondants. En effet, les seuls côtés dont les régions extérieure et intérieure soient échangées par l'opération sont ceux qui sont rencontrés *intérieurement* par la droite projetée suivant la droite de l'infini. Or ces côtés sont en nombre pair. Donc, etc.

Mais cette démonstration suppose essentiellement la réalité du polygone. Pour établir le théorème dans toute sa généralité, il faut procéder analytiquement. Nous nous y prendrons comme il suit :

On peut, d'une infinité de manière, définir un changement de coordonnées tel que l'on ait identiquement

$$f(x, y, z) = F(X, Y, Z) = X^2 - 2YZ.$$

De l'identité valable, quel que soit λ ,

$$f(x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, z_1 + \lambda z_2) = F(X_1 + \lambda X_2, \dots)$$

on tire

$$f_{12} = F_{12} = X_1 X_2 - Z_1 Y_2 - Y_1 Z_2.$$

Un point de la conique

$$X^2 - 2YZ = 0$$

peut être défini paramétriquement par

$$X = 2u, \quad Y = u^2, \quad Z = 2.$$

Soit u_i le paramètre du point de contact du côté $M_{i-1}M_i$ (en posant $M_0 = M_n$). On trouve, par un calcul facile,

$$\begin{aligned} X_1 &= u_1 + u_2, & Y_1 &= u_1 u_2, & Z_1 &= 2, \\ F_{11} &= (u_1 - u_2)^2, & F_{12} &= -(u_1 - u_2)(u_2 - u_3). \end{aligned}$$

Par multiplication de ces relations et des relations analogues, on obtient bien celle qu'il fallait démontrer.

Autres solutions par MM. J. ROSE et M. FAUCHEUX.