

Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 19
(1919), p. 112-116

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__112_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1919, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CORRESPONDANCE.

M. F. Balitrand. — *Au sujet des foyers rationnels des courbes.* — Étant donnée dans un plan une courbe (C) , si l'on prend sa polaire réciproque par rapport à un cercle de centre (α, β) , on obtient une courbe (C_1) . Les points cycliques du plan donnent les droites isotropes issues de (α, β) ; les tangentes à (C) , issues de ces points, donnent les points d'intersection de ces droites isotropes avec (C_1) ; les foyers de (C) donnent les droites qui joignent deux à deux ces points d'intersection.

Comme en général (C) n'admet pas les points cycliques comme points multiples, de même en général (C_1) n'admet pas les droites isotropes issues de (α, β) , quel que soit (α, β) , comme tangentes multiples, c'est-à-dire ne possède pas de foyers rationnels. Il semble donc bien que l'équation

$$[(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2] Q^2(x, y) = P^2(x, y)$$

doit être envisagée plutôt comme définissant une classe de courbes remarquables, que comme fournissant l'extension aux courbes de degré quelconque de la définition donnée par J. Bret pour les foyers des coniques.

Dans le cas où une courbe admet un foyer rationnel, en le choisissant pour origine, son équation prend la forme

$$(x^2 + y^2) f^2(x, y) = \varphi^2(x, y);$$

et l'on voit que cette courbe est la transformée, par dualité, d'une courbe de direction de Laguerre.

La considération des droites, qui joignent deux à deux les points d'intersection d'une courbe avec les droites isotropes issues d'un point de son plan, remonte au moins à Laguerre (*Bulletin de la Société philomathique*, 1867; *Œuvres complètes*, t. 2, p. 27). Il les a appelées *droites conjointes*.

Dans les coniques, les lignes conjointes, envisagées d'abord par Terquem et Chasles, ont permis à M. M. d'Ocagne (*N. A.*, 1896, p. 353) de déduire de leurs propriétés, au moyen d'une transformation par polaires réciproques, celles des foyers de ces courbes.

Dans l'espace, on peut de même envisager les cônes qui passent par l'intersection d'une quadrique et d'un cône isotrope et déduire de leurs propriétés, par la même transformation, celles des foyers et des focales des surfaces du second ordre. Cette déduction a-t-elle été faite?

M. M. d'Ocagne. — *A propos de quelques applications géométriques de la théorie des infiniment petits*. — Il s'agit de celles envisagées par M. M. Weill dans une Note récente (*N. A.*, 1918, p. 424).

La formule trouvée par cet auteur pour résoudre le problème de la tangente au lieu du sommet d'un angle circonscrit à des courbes données est une variante de celle donnée pour le même objet par M. Bouvaist (*N. A.*, 1918, p. 164). Il est d'ailleurs bien facile de passer de l'une à l'autre.

En effet, avec les notations de M. Weill, si la tangente au lieu (M) du sommet de l'angle (voir la figure, *loc. cit.*, p. 425) coupe la corde AB des contacts en T, la formule de M. Bouvaist s'écrit

$$\frac{AT}{PA} \frac{PB}{BT} = \frac{\overline{AM}^3}{\overline{BM}^3} \frac{R'}{R}.$$

Or, h et h' étant les distances des points A et B à la tangente MT, on a

$$\frac{AT}{BT} = \frac{h}{h'}.$$

De plus, δ et δ' étant les distances du point P à AM et BM, on a, par la comparaison des aires des triangles MAP et MBP,

$$\frac{\delta \cdot AM}{\delta' \cdot BM} = \frac{PA}{PB}.$$

Les deux dernières formules écrites permettent de transformer immédiatement la précédente en

$$\frac{\overline{BM}^2 \overline{PB}^2}{\overline{AM}^2 \overline{PA}^2} = \frac{\delta' h' R'}{\delta h R};$$

c'est la formule de M. Weill.

Quant à la détermination géométrique des maxima et minima de certains éléments liés à un segment de droite variable, indiquée par M. Weill dans la seconde partie de sa Note, elle rentre dans la méthode générale que nous indiquons dans notre *Cours de Géométrie pure et appliquée de l'École Polytechnique* (t. I, p. 146) après en avoir fait de nombreuses applications, notamment dans notre Note *Sur les cordes normales de la parabole* (*N. A.*, 1896, p. 274) où l'on trouvera (p. 278) le théorème sur les courbes quelconques qui termine la Note de M. Weill (*loc. cit.*, p. 429).

M. R. Bouvaist. — *Au sujet de la question proposée n° 2374* (M. D'OCAGNE). — Je signale la construction suivante qui généralise la question proposée :

Soient O un point d'une courbe (M) orientée, M un point de cette courbe, G le centre de gravité de l'arc

OM, lorsque M se déplace sur (M), G décrit une courbe (G), qui jouit des propriétés suivantes :

1° La tangente à (G) en G est la droite GM.

2° Le plan osculateur en G à (G) contient la tangente en M à (M).

3° Si l'on mène par G un vecteur parallèle à la tangente en M à (M) et si l'on prend sur ce vecteur un segment $\overline{GK} = \frac{\overline{GM}^2}{\text{arc OM}}$, la perpendiculaire élevée en K à GK dans le plan osculateur à (G) en G rencontre la normale principale à (G) en G au centre de courbure de (G) en ce point.

M. d'Ocagne. — *Sur les courbes algébriques singulières sous le rapport des barycentres cycliques.* — Le premier des théorèmes contenus dans une Note récente sur les cercles bitangents à la parabole (*N. A.*, 1918, p. 464) n'est qu'un cas particulier d'une propriété depuis longtemps connue (voir *Journal de Mathématiques spéciales* de Longchamps, 1891, p. 97). Je ne mentionne ici le fait que pour avoir occasion de signaler à nouveau la généralisation que j'ai par la suite donné de cette propriété de la parabole.

Ayant remarqué que le barycentre G des points de rencontre d'un cercle et d'une courbe algébrique quelconque ne dépend que du centre C de ce cercle, et non de son rayon, j'ai donné à G le nom de *barycentre cyclique* de C par rapport à cette courbe, et fait voir ⁽¹⁾ que les coordonnées de G s'expriment en fonction linéaire de celles de C, ou encore que la relation entre G et C n'est autre qu'une affinité.

(¹) *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1902, p. 83.

Toutefois, il est une classe importante de courbes algébriques, singulières à ce point de vue, et dont j'ai donné la définition la plus générale⁽¹⁾, pour lesquelles les barycentres cycliques G, de tous les points C du plan, sont situés *sur une même droite* Δ de ce plan, tous les points C qui correspondent à un même point G de Δ appartenant à une même droite D perpendiculaire à Δ et dont la distance δ à G est, au reste, constante.

La parabole est la plus simple de ces courbes singulières; pour elle, Δ se confond avec son axe et la distance est égale à son paramètre.

Les paraboles d'ordre supérieur appartiennent à la même catégorie, mais, pour elles, dès le troisième ordre, δ est nul.

Les courbes de Lamé

$$\frac{x^m}{a^m} + \frac{y^m}{b^m} = 1,$$

d'ordre impair, offrent également ce caractère, avec $\delta = 0$.