Nouvelles annales de mathématiques

R. Goormaghtigh

Sur l'affinité imaginaire

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 18 (1918), p. 81-95

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__81_0>

[P¹1e]

SUR L'AFFINITÉ IMAGINAIRE;

PAR M. R. GOORMAGHTIGH.

Dans les développements qui suivent, nous considérons la transformation par affinité définie par les équations

$$x' = x, \qquad y' = iy. \tag{1}$$

Les points réels de la transformée (Γ') d'une courbe (Γ) correspondent à des points imaginaires de celle-ci. Ainsi, les constructions (¹) qui, dans le cas d'un rapport d'affinité réel, permettent d'obtenir le centre de courbure en un point de la courbe (Γ') affine d'une courbe (Γ) connaissant celui de (Γ) au point correspondant, sont en défaut dans le cas de la transformation envisagée. Dans cette Note, nous indiquons une solution d'un problème analogue, ainsi que plusieurs rapports remarquables que la transformation (1) permet d'établir entre plusieurs courbes connues (²).

1. Si la courbe (Γ) est un cercle (C) de centre O, de rayon a, la courbe (Γ') est une hyperbole équilatère (H) ayant l'axe Ox pour axe réel. Deux directions rectangulaires sont conjuguées par rapport à (C);

(¹) Voir *Nouvelles Annales*, 1915, p. 423; 1916, p. 78; 1917, p. 84.

(²) *Voir* aussi notre Note *Sur un rapprochement remarquable entre l'hypocycloïde à trois rebroussements, le folium de Descartes et la cardioïde* (*Nouvelles Annales*, 1916, p. 241-252).

à deux directions perpendiculaires correspondent donc, d'après la transformation (1), deux directions conjuguées par rapport à (H), c'est-à-dire symétriques par rapport aux bissectrices $O\xi$, $O\eta$ de l'angle des axes Oxy.

Il résulte de là que la courbe affine de la développée de (Γ) n'est autre qu'une *causticoïde* de la courbe (Γ') : c'est l'enveloppe de la symétrique de la tangente en un point de (Γ') par rapport à la parallèle menée par ce point à $O\eta$.

2. *Construction du centre de courbure de la transformée d'une courbe.* — La remarque qui précède donne le moyen de trouver une construction du centre de courbure γ en un point Q de (Γ') quand on connaît une méthode pour construire le centre de courbure C de (Γ) en l'un de ses points M. Faisons au point Q de (Γ') une construction qui est la transformée par l'affinité (1) de celle qu'on fait en un point quelconque M de (Γ) pour trouver le centre de courbure C en ce point; on obtiendra ainsi le point δ où la symétrique t' de la tangente t à (Γ') en Q, par rapport à la parallèle menée par Q à $O\eta$, touche son enveloppe. Connaissant δ on en déduit γ au moyen de la propriété fondamentale des causticoïdes : soit γ' le point où la perpendiculaire élevée en δ sur t' coupe la normale à (Γ') en Q ; γ est le symétrique de γ' par rapport à Q.

3. Soit encore une transformation géométrique T; au moyen de l'affinité (1) on en déduit une autre T'. Désignons par (Γ_1) la courbe déduite de (Γ) par la transformation T, et par (Γ'_1) celle déduite de (Γ') au moyen de la transformation T'. Si l'on connaît une méthode pour construire le centre de courbure en un point M_1 de (Γ_1), connaissant celui de (Γ) au point cor-

respondant M, on pourra encore en déduire une méthode pour obtenir le centre de courbure en un point Q_1 de (Γ'_1) connaissant celui de (Γ') au point correspondant Q.

Au moyen de la construction rappelée plus haut on déduit du centre de courbure γ de (Γ') le point correspondant δ de la causticoïde de (Γ'); au point obtenu on applique la construction affine de celle au moyen de laquelle on passe du centre de courbure de (Γ) à celui de (Γ_1). On obtient ainsi le point de la causticoïde de (Γ'_1) correspondant à Q_1, d'où l'on déduit le centre de courbure de (Γ'_1) en Q_1.

On trouvera une application de cette méthode au paragraphe 5.

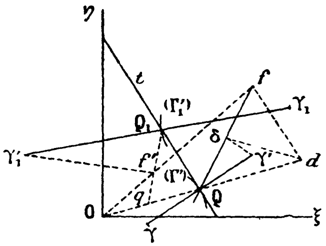
4. Comme première application des développements qui précèdent, nous signalerons un rapprochement remarquable entre la transformation podaire et une autre transformation géométrique $\mathfrak{T}$.

D'après la remarque faite au début du paragraphe 1, la courbe affine du lieu de la projection de O sur la tangente en un point variable de (Γ) est le lieu de l'intersection Q_1 de la tangente t en un point variable Q de (Γ') avec la droite menée par O et ayant une direction symétrique de celle de t par rapport à $O\xi$.

La transformation podaire a pour affine la transformation $\mathfrak{T}$ qui fait correspondre à une courbe (Γ') *le lieu* (Γ'_1) *des milieux des segments que deux axes rectangulaires* $O\xi, O\eta$ *déterminent sur une tangente variable de* (Γ').

On peut donc déduire, de la construction bien connue de la tangente à la podaire d'une courbe, une méthode pour obtenir la tangente (1) en un point Q_1 de la courbe (Γ'_1) déduite de (Γ') par la transformation $\mathfrak{T}$ (*fig.* 1).

Fig. 1.



La droite qui joint Q_1 *au milieu* q *de* OQ *est la symétrique de la tangente à* (Γ'_1) *en* Q_1 *par rapport à la parallèle menée à* $O\eta$ *par ce point.*

5. Appliquons maintenant à la transformation $\mathfrak{T}$ la méthode du paragraphe 3 pour construire le centre de courbure γ_1 de (Γ'_1) en Q_1 connaissant celui de (Γ') en Q.

Du centre de courbure donné γ, on déduit d'abord le point δ où la symétrique de t par rapport à l'ordonnée de Q touche son enveloppe :

On projette le symétrique γ' *de* γ *par rapport à* Q *en* δ *sur la parallèle menée par* Q *à* OQ_1.

Connaissant le point δ, on en déduit, par la construction affine de celle qui donne le centre de courbure de la podaire d'une courbe, le point f' où $Q_1 q$ touche son enveloppe :

---

(1) Pour la construction de la tangente, *voir* : G. DE LONGCHAMPS, *Period. di Matem.*, 1903, p. 241 ; M. D'OCAGNE, *Nouvelles Annales*, question 2264, 1915, p. 478. — *Voir* aussi : MANNHEIM, *Principes et développements de Géométrie cinématique*, p. 16.

Par δ *on mène une droite qui a une direction symétrique de celle de* OQ *par rapport à* $O\xi$ *et qui coupe* OQ *en* d; *la parallèle menée par* d *à* QQ_1 *rencontre* $Q\delta$ *en* f, Of *coupe* Q_1q *en* f'.

Connaissant le point f', on obtient immédiatement le centre de courbure cherché :

La perpendiculaire élevée en f' *sur* Q_1f' *passe par le symétrique du centre de courbure cherché par rapport à* Q_1.

6. *La lemniscate de Bernoulli et la kreuzcurve circulaire.* — Si (Γ) est l'hyperbole équilatère (H), la podaire de (Γ) par rapport à O est une lemniscate de Bernoulli. La courbe (Γ') est alors le cercle (C) et la courbe (Γ'_1) est la kreuzcurve circulaire dont les asymptotes sont parallèles à $O\xi$, $O\eta$ et à laquelle (C) est quatre fois tangent. *La transformée par l'affinité* (1) *d'une lemniscate de Bernoulli* (B) *est donc une kreuzcurve* (K). Il résulte d'abord de là que ces courbes ont les mêmes propriétés descriptives ([1]).

On peut ensuite remarquer que, la kreuzcurve (K) étant la polaire réciproque de l'astroïde droite

$$(x+y)^{\frac{2}{3}}+(x-y)^{\frac{2}{3}}=2a^{\frac{2}{3}} \tag{2}$$

par rapport à (C), on a ainsi un moyen de déduire des propriétés connues de la lemniscate (B) des propriétés de l'astroïde (2) et aussi des développées d'ellipses qui lui sont affines.

Par exemple, on sait que les points de contact des quatre tangentes menées d'un point de la lemniscate

([1]) Ces propriétés sont celles des quartiques à trois points doubles à inflexion.

à la courbe sont sur une droite qui enveloppe l'hyperbole homothétique de (H) pour le rapport 1 : 2. On en déduit immédiatement ce théorème de M. Laisant :

La normale en un point d'une ellipse coupe la développée en quatre points pour lesquels les tangentes sont concourantes.

Le lieu du point de concours est l'ellipse qui a ses sommets aux rebroussements de la développée.

7. Considérons la demi-croix de Malte (M) qui est parallèle à l'astroïde (2) et a Ox comme tangente au point autotangentiel O. Sa polaire réciproque par rapport à (C) est la campyle d'Eudoxe (E) ayant pour équation

$$x^4 = \frac{a^2}{4}(x^2 + y^2);$$

la courbe affine de celle-ci est la lemniscate de Gerono (G)

$$x^4 = \frac{a^2}{4}(x^2 - y^2).$$

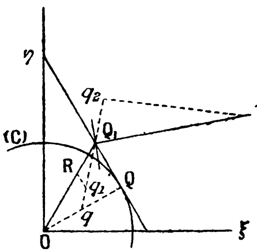
Puisque la courbe (M) et l'astroïde (2) sont parallèles, si par O on mène une semi-droite s, les tangentes à (K) et (E) aux points où ces courbes rencontrent s se coupent sur la perpendiculaire élevée en O sur s. En passant de là aux courbes (B) et (G) on trouve ce rapport intéressant entre les lemniscates de Bernoulli et de Gerono :

On considère une lemniscate de Gerono d'axe a et une lemniscate de Bernoulli d'axe $2a$ ayant mêmes tangentes nodales. Les tangentes à ces courbes aux points où elles rencontrent une semi-droite s_1 menée par O se coupent sur la symétrique de s_1 par rapport aux tangentes nodales.

8. *Construction du centre de courbure de la kreuzcurve circulaire et de la kohlenspitzcurve équilatère.* — Si l'on considère la lemniscate de Bernoulli comme spirale sinusoïde d'indice 2, on voit que le centre de courbure en un point M de (B) appartient à la perpendiculaire élevée sur le rayon vecteur OM au point qui le divise dans le rapport 2 : 1.

D'après le paragraphe 2, on aura donc la construction suivante du centre de courbure de (K) au point Q_1 correspondant au point Q de (C) (*fig.* 2) : on divise OQ_1

Fig. 2.



dans le rapport 2 : 1, et par le point R obtenu on mène une parallèle à $Q_1 Q$ qui coupe la droite qui joint Q_1 au milieu q de OQ en q_1, la perpendiculaire élevée sur $q_1 Q_1$ au symétrique q_2 de q_1 par rapport à Q_1 passe par le centre de courbure cherché. On en déduit cette construction simple :

On prolonge la droite qui joint le milieu q de OQ *à* Q_1 *au delà de* Q_1 *des* $\frac{2}{3}$ *de* qQ_1 ; *la perpendiculaire élevée sur* qQ_1 *au point obtenu passe par le centre de courbure cherché.*

Si l'on considère la kohlenspitzcurve équilatère obtenue en transformant (K) par l'affinité $\xi' = \xi$,

$\eta_1' = i\eta$, on voit facilement qu'on peut employer, pour obtenir le centre de courbure de cette courbe, une construction identique à celle que nous venons de trouver pour la kreuzcurve. Ceci résulte aussi de la remarque suivante : la kohlenspitzcurve considérée se déduit par l'affinité (1) d'une lemniscate de Bernoulli (imaginaire) qui a Ox et Oy pour tangentes nodales.

9. On sait que le lieu des centres des coniques dont un foyer est fixe et qui ont avec une courbe donnée un contact du second ordre est la développée de la podaire de cette courbe ([1]).

Si l'on observe que l'affinité (1) fait correspondre les droites $O\xi$, $O\eta$ aux droites isotropes menées par O, on a ce résultat :

Le lieu des centres des coniques (Σ) *qui touchent* $O\xi$ *et* $O\eta$ *et qui ont un contact du second ordre avec une courbe* (Γ') *est une causticoïde de la courbe* (Γ'_1) *déduite de* (Γ') *par la transformation* $\mathfrak{T}$.

En particulier :

Le lieu des centres des coniques qui ont un contact du second ordre avec une astroïde et qui touchent les tangentes cuspidales est une autre astroïde.

Au moyen de la transformation par polaires réciproques par rapport à (C) on déduit des coniques (Σ) que nous venons de considérer des hyperboles équilatères qui ont un contact du second ordre avec la polaire réciproque de (Γ') et dont les asymptotes sont parallèles à $O\xi$ et $O\eta$. Au lieu des centres des coniques (Σ) correspond l'enveloppe de la polaire de O par rapport

---

(1) *Nouvelles Annales*, 1916, p. 21.

à ces hyperboles. Si l'on passe ensuite à la figure affine, on est amené à considérer la transformation qui fait correspondre à une courbe donnée l'enveloppe des polaires de O par rapport aux cercles osculateurs de cette courbe.

En observant que Qq est la tangente en f' au lieu des centres des coniques (Σ), on voit aisément que *le point où la polaire de* O *par rapport au cercle osculateur au point variable d'une courbe touche son enveloppe appartient à la perpendiculaire élevée en ce point de la courbe sur la droite qui le joint à* O.

On pourra facilement déduire de la propriété de l'astroïde trouvée plus haut le théorème suivant :

Les polaires du point double d'une lemniscate de Bernoulli par rapport aux cercles osculateurs de la courbe enveloppent une kohlenspitzcurve équilatère.

Par un point de la lemniscate passent trois cercles qui osculent la courbe en un autre point; les points d'osculation appartiennent à la perpendiculaire élevée au point considéré sur le rayon vecteur de ce point. Au moyen des considérations qui précèdent, on déduit de là ce théorème :

Parmi les quatre tangentes qu'on peut mener à une astroïde par un point P *du cercle inscrit, l'une a une direction symétrique de celle de* OP *par rapport aux tangentes cuspidales* $O\xi$, $O\eta$. *La conique qui touche cette tangente et l'une des trois autres en son point de contact avec l'astroïde et qui touche en outre les tangentes cuspidales a un contact du second ordre avec la courbe.*

10. *Centre de courbure de la sinusoïde.* — Au

moyen de l'affinité définie par les équations (1) on déduit de la chaînette

$$x = a \operatorname{ch} \frac{y}{a}$$

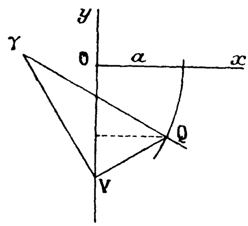
la sinusoïde

$$x = a \cos \frac{y}{a};$$

nous appellerons l'axe y la *base* de la sinusoïde.

Le centre de courbure en un point M de la chaînette est le symétrique, par rapport à M, du point où la normale coupe la base. On déduit de là, d'après la méthode indiquée plus haut, cette construction du centre de courbure en un point Q de la sinusoïde : la symétrique de la normale par rapport à l'ordonnée de Q coupe Oy en V; la perpendiculaire élevée sur QV au symétrique

Fig. 3.



de V par rapport à Q coupe la normale au symétrique du centre de courbure par rapport à Q. D'où cette construction simple (*fig.* 3) :

Le centre de courbure en un point Q de la sinusoïde appartient à la perpendiculaire élevée sur la symétrique de la normale par rapport à l'ordonnée de Q, au point où cette symétrique coupe la base.

11. La radiale de la chaînette est la campyle d'Eudoxe

$$x^4 = a^2(x^2 + y^2);$$

il en résulte que, si l'on mène par le point O des segments équipollents aux normales de la chaînette, le lieu des extrémités de ces segments est la même campyle d'Eudoxe. L'affine de cette courbe étant une lemniscate de Gerono, on voit que, si l'on mène par O des segments équipollents aux segments tels que QV, le lieu des extrémités des segments sera une lemniscate de Gerono. Comme QV est symétrique de la normale à la sinusoïde en Q par rapport à l'ordonnée de Q, on a donc ce théorème :

Si l'on mène par un point des segments équipollents aux segments des normales à une sinusoïde compris entre les points d'incidence et la base, le lieu des extrémités de ces segments est une lemniscate de Gerono.

Le raisonnement précédent montre que si, d'une manière générale, on considère le lieu (Γ_2) des extrémités des segments équipollents aux normales d'une courbe (Γ) portés à partir d'un point, et le lieu (Γ'_2) analogue pour la courbe affine (Γ') de (Γ), les courbes (Γ_2) et (Γ'_2) se déduisent aussi l'une de l'autre par l'affinité (1).

12. *Centre de courbure de la courbe* $x = a\,\mathrm{sh}\frac{y}{a}$. — En passant de la sinusoïde

$$x = a \sin\frac{y}{a}$$

successivement aux courbes

$$x = a \sin\frac{iy}{a} = ai\,\mathrm{sh}\frac{y}{a}, \qquad x = a\,\mathrm{sh}\frac{y}{a},$$

on voit facilement que la construction du centre de courbure de la courbe considérée est identique à celle que nous avons donnée pour la sinusoïde.

On trouve de même que le lieu des extrémités des segments équipollents aux normales de la courbe portés à partir d'un point est encore une lemniscate de Gerono.

13. *Courbes* $\xi^k \eta^l = C$. — Considérons la spirale logarithmique ayant pour équation en coordonnées polaires

$$\rho = c\, e^{\alpha i \omega},$$

c et α étant des constantes. On peut aussi écrire cette équation sous la forme

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\log[(x+iy)(x-iy)]\\ &\qquad = \log c - i\alpha \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x} = \log c + \frac{\alpha}{2}\log\frac{iy+x}{iy-x}.\end{aligned}$$

La courbe affine aura pour équation

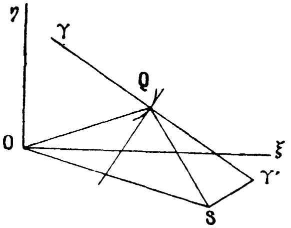
$$\frac{1}{2}\log[(x+y)(x-y)] = \log c + \frac{\alpha}{2}\log\frac{y+x}{y-x}.$$

Si l'on rapporte cette courbe aux axes $O\xi$, $O\eta$, on voit qu'elle a une équation de la forme $\xi^k \eta^l = C$; cette classe de courbes renferme les *paraboles* et *hyperboles d'indices quelconques* ainsi que les *courbes polytropiques*.

Au moyen de la méthode du paragraphe **2**, on déduit de la construction bien connue du centre de courbure de la spirale logarithmique celle du centre de courbure en un point Q d'une courbe $\xi^k \eta^l = C$ (*fig.* 4); elle s'applique quels que soient k et l.

La symétrique de la tangente en Q *par rapport* *à l'ordonnée de* Q *rencontre en* S *la symétrique de* OQ *par rapport à* Oξ. *La perpendiculaire élevée*

Fig. 4.



en S *sur* QS *passe par le symétrique du centre de courbure par rapport à* Q.

De la propriété fondamentale de la spirale logarithmique on déduit aussi cette propriété caractéristique des courbes $\xi^k \eta^l = C$:

La symétrique de la tangente en Q *par rapport à l'ordonnée de* Q *détermine sur la symétrique de* OQ *par rapport à* Oξ *un segment* OS *que la tangente divise dans un rapport constant.*

La podaire d'une spirale logarithmique par rapport au pôle étant une autre spirale logarithmique, on a encore cette proposition :

Le lieu des milieux des segments que les axes Oξ, Oη *déterminent sur les tangentes à une courbe* $\xi^k \eta^l = C$ *est une courbe du même genre.*

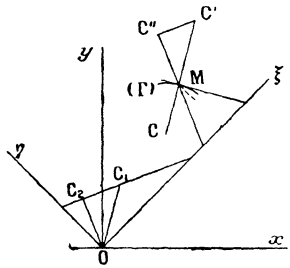
On sait que les points de contact des tangentes menées d'un point à la spirale appartiennent à un cercle passant par ce point et par le pôle.

Les points de contact des tangentes menées d'un *point à la courbe $\xi^k \eta^l = C$ appartiennent à une hyperbole équilatère qui passe par ce point et par* O *et dont les asymptotes sont parallèles à* $O\xi$, $O\eta$.

14. *Radiales des courbes transformées.* — Proposons-nous de déterminer la radiale (R′) de l'affine (Γ′) de (Γ) connaissant la radiale (R) de (Γ).

Soient C′ le symétrique de C par rapport à M, C″ la projection de C′ sur la symétrique de la tangente en M à (Γ) par rapport à la parallèle menée par M à $O\eta$ (*fig.* 5). La courbe (R′) est l'affine du lieu de l'extré-

Fig. 5.



mité du segment OC_2 équipollent à MC′. Si l'on observe que les directions de C′C″ et CM sont symétriques par rapport à $O\xi$, on trouve ce théorème :

La radiale (R′) *de l'affine* (Γ′) *de* (Γ) *est l'affine de la podaire, par rapport à* O, *de la courbe qu'on déduit de la radiale* (R) *de* (Γ) *par la transformation inverse de la transformation* $\mathfrak{T}$.

Ainsi, la radiale d'un cercle (C) coïncide avec ce cercle; la courbe qu'on en déduit au moyen de la transformation inverse de la transformation $\mathfrak{T}$ est l'astroïde qui touche quatre fois (C) et a ses rebroussements sur $O\xi$, $O\eta$; la podaire de l'astroïde est la rosace

$$(x^2+y^2)^3 = a^2(x^2-y^2)^2.$$

La radiale de l'hyperbole équilatère (H) est donc la sextique ([1])

$$(x^2-y^2)^3 = a^2(x^2+y^2)^2.$$