

J. BOUCHARY

Sur les cercles bitangents à la parabole

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 18
(1918), p. 464-471

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__464_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1918, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[L'10d]

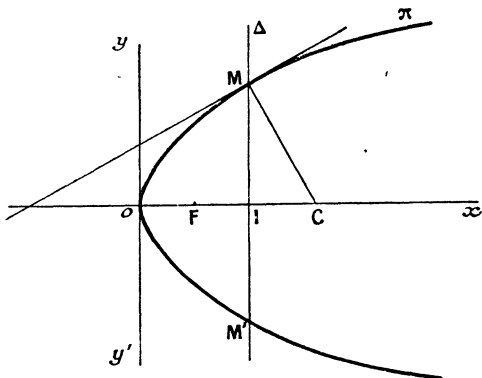
SUR LES CERCLES BITANGENTS A LA PARABOLE;

PAR M. J. BOUCHARY,

Élève à l'École Colbert.

Soient une parabole π , F son foyer, O le sommet, yOy' la tangente au sommet, Ox l'axe et p le paramètre et M, M' deux points symétriques par rapport à l'axe; les normales en M et M' concourent par raison de symétrie en un point C de l'axe; le cercle de centre C et de rayon CM aura, en M et M', mêmes tangentes que

la parabole. On dit qu'il est bitangent à la parabole, MM' est la corde de contact.



Recherche de la position du centre. — Soient

$$(1) \quad y^2 = 2px$$

l'équation de la parabole rapportée à sa tangente au sommet et à l'axe, puis

$$(2) \quad (x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 = 0$$

l'équation du cercle rapporté aux mêmes axes. Formons l'équation aux ordonnées des points de rencontre. De (1) on tire

$$x = \frac{y^2}{2p},$$

puis portons dans (2), il vient

$$\left(\frac{y^2}{2p} - a\right)^2 + (y - b)^2 - R^2 = 0$$

ou

$$\frac{y^4}{4p^2} + a^2 - \frac{ay^2}{p} + y^2 + b^2 - 2by - R^2 = 0$$

ou encore

$$(3) \quad y^4 + 4y^2(p^2 - ap) - 8ybp^2 + 4p^2(a^2 + b^2 - R^2) = 0.$$

Cette équation n'a pas de terme en y^3 , la somme des racines est donc nulle, et nous pouvons énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Quand un cercle rencontre une parabole en quatre points, la somme algébrique des perpendiculaires abaissées de ces quatre points sur l'axe de la parabole est nulle.*

Il résulte de ce théorème que, lorsque le cercle sera bitangent à la parabole, les ordonnées des points de contact seront égales, mais de signe contraire.

L'équation (3) se présentera sous la forme

$$(4) \quad \begin{aligned} 0 &= (y - y_1)^2 (y_1 + y)^2, \\ (y^2 + 2yy_1 + y_1^2)(y^2 + 2yy_1 + y_1^2) &= 0, \\ y^4 - 2y^2y_1^2 + y_1^4 &= 0. \end{aligned}$$

L'équation n'a pas de termes en y et, si nous identifions les deux équations, il faut que $b = 0$, puis

$$(a) \quad y_1^2 = 2p(a - p),$$

l'ordonnée du point de contact est donc

$$(5) \quad y_1 = \pm \sqrt{2p(a - p)};$$

identifions les termes constants des deux équations

$$(6) \quad y_1^4 = 4p^2(a^2 - R^2) \quad \text{ou} \quad y_1^2 = 2p\sqrt{a^2 - R^2};$$

égalons (a) et (6), il vient

$$(6) \quad \begin{aligned} (a - p)^2 &= a^2 - R^2, \\ R^2 &= 2ap - p^2 \quad \text{ou} \quad R = \sqrt{p(2a - p)}; \end{aligned}$$

donc, pour que les cercles existent, il faut

$$(2a - p) > 0 \quad \text{ou} \quad a \geq \frac{p}{2};$$

si $a = \frac{p}{2}$ le rayon est nul, l'égalité (6) définit une famille de cercles comprenant un cercle de rayon nul, qui est le foyer; le rayon croît constamment quand a croît, c'est-à-dire quand C s'éloigne de F dans le sens positif de l'axe. Calculons l'abscisse du point de contact, écrivons que ce point est sur la parabole, on a :

$$\begin{aligned} 2px &= 2p(a - p), \\ x &= a - p; \end{aligned}$$

c'est l'abscisse du point I d'intersection de MM' avec l'axe; or l'abscisse de C est $x = a$; faisons la différence $IC = p$, d'où le théorème suivant :

THÉORÈME. — L'abscisse du centre et l'abscisse du point de contact ont une différence constante et égale au paramètre de la parabole.

On a vu précédemment que b était nul, et que

$$R^2 = 2ap - p^2;$$

l'équation du cercle bitangent est donc

$$(x - a)^2 + y^2 + p^2 - 2ap = 0;$$

il n'y a qu'un seul paramètre variable, a .

On peut former rapidement cette équation d'après l'égalité $f + P^2 = 0$ qui est l'équation des coniques bitangentes à la conique $f = 0$; P étant l'équation de la corde de contact, il vient

$$y^2 - 2px + (x - x_0)^2 = 0;$$

x_0 abscisse de M ou

$$y^2 - 2px + x^2 + a^2 + p^2 - 2ap - 2xa + 2px = 0,$$

$$x^2 + y^2 - 2ax + a^2 + p^2 - 2ap = 0$$

ou enfin

$$(7) \quad (x - a)^2 + y^2 + p^2 - 2ap = 0.$$

On tire le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Tous les cercles bitangents à la parabole ont leur centre sur l'axe des x ; la corde de contact est perpendiculaire à l'axe de la parabole; il n'existe qu'un seul cercle de centre donné, bitangent à la parabole.*

Calculons FC et FM.

On a

$$FC = OC - OF = a - \frac{p}{2},$$

puis

$$\begin{aligned} \overline{FM}^2 &= \overline{FI}^2 + \overline{IM}^2 \\ &= \left(a - p - \frac{p}{2} \right)^2 + 2p(a - p) \\ &= a^2 + \frac{9p^2}{4} - 3ap + 2ap - 2p^2 \\ &= \left(a^2 + \frac{p^2}{4} - ap \right), \end{aligned}$$

$$\overline{FM}^2 = \left(a - \frac{p}{2} \right)^2;$$

donc

$$FM = FC.$$

On a le théorème suivant :

THÉORÈME. — *La corde de contact est l'axe radical du cercle bitangent et du cercle ayant pour centre le point F et pour rayon FC.*

Démontrons maintenant le théorème suivant :

THÉORÈME. — *L'axe radical de deux cercles bitangents est équidistant des cordes de contact.*

L'équation d'un cercle bitangent à la parabole est

$$(x - a)^2 + y^2 + p^2 - 2ap = 0,$$

a désignant l'abscisse du centre; considérons un autre cercle bitangent, son équation est

$$(x - a')^2 + y^2 + p^2 - 2a'p = 0;$$

l'équation de l'axe radical de ces cercles est

$$a^2 - a'^2 - 2x(a - a') - 2p(a - a') = 0,$$

en divisant par $a - a'$ qui est essentiellement différent de 0,

$$a + a' - 2x - 2p = 0,$$

$$x = \frac{a + a'}{2} - p;$$

l'équation des cordes de contact est

$$x = a - p, \quad x = a' - p;$$

l'équation de la parallèle équidistante est

$$x = \frac{a + a'}{2} - p;$$

les deux droites coïncident bien; le théorème est démontré.

On peut transformer le théorème comme il suit :

THÉORÈME. — *Étant donnés trois cercles bitangents à la parabole, les abscisses des centres étant a , a' et a'' (avec $a > a' > a''$), la condition nécessaire et suffisante pour que la corde de contact du second soit axe radical des deux autres est que $a + a'' = 2a'$.*

On a le théorème suivant :

THÉORÈME. — *La puissance d'un point $x_0 y_0$ de la parabole par rapport à un cercle bitangent est égale au carré de la distance du point considéré à la corde de contact.*

En effet, soit

$$(x - a)^2 + y^2 + p^2 - 2ap = 0$$

l'équation du cercle bitangent; la puissance du point $(x_0 y_0)$ est

$$(x_0 - a)^2 + y_0^2 + p^2 - 2ap = d^2,$$

et la distance de ce point à la corde de contact est

$$l^2 = (x_0 - a + p)^2 \quad \text{ou} \quad l^2 = (x_0 - a)^2 + p^2 + 2p(x_0 - a);$$

or

$$2px_0 = y_0^2, \quad l^2 = (x_0 - a)^2 + y_0^2 + p^2 - 2ap;$$

donc $d^2 = l^2$; le théorème est démontré.

THÉORÈME. — *La somme des longueurs des tangentes issues d'un point de la parabole $(x_0 y_0)$ à deux cercles bitangents à la parabole est égale à la distance des cordes de contact.*

Nous n'avons qu'à appliquer deux fois le théorème précédent.

On démontrerait sans plus de difficulté les théorèmes suivants :

I. THÉORÈME. — *Étant donnés deux cercles bitangents à une parabole, on mène la tangente commune intérieure rencontrant la parabole en M et P : 1° Le cercle décrit sur MP est tangent aux cordes de contact des cercles bitangents; 2° Son centre est équidistant des points de contact des cercles et de la tangente commune.*

II. THÉORÈME. — 1° *La distance des centres des cercles bitangents est égale à MP*; 2° *Le premier cercle bitangent est orthogonal aux cercles de centres M et P et ayant pour rayons les distances de M et P à la corde de contact.*