

MATHIEU WEILL

**Propriété de certaines courbes et
surfaces enveloppes**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 18
(1918), p. 462-464

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__462_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1918, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[O'2f][O'6j]

**PROPRIÉTÉ DE CERTAINES COURBES
ET SURFACES ENVELOPPES;**

PAR M. MATHIEU WEILL.

Soit

$$(1) \quad f(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) = 0$$

une relation entre les distances de n points fixes à une droite mobile qui a pour équation, en coordonnées rectangulaires,

$$(2) \quad x \cos \alpha + y \cos \beta - p = 0,$$

avec la relation

$$(3) \quad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - 1 = 0.$$

La distance δ_1 du point x_1, y_1 à la droite a pour expression

$$\delta_1 = x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta - p.$$

Pour avoir le point où la droite mobile touche son enveloppe, prenons les différentielles totales des équations (1), (2) et (3), nous aurons

$$\begin{aligned} x \sin \alpha \, d\alpha + y \sin \beta \, d\beta + dp &= 0, \\ \sin \alpha \, dx \Sigma x_1 f'_{\delta_1} + \sin \beta \, d\beta \Sigma y_1 f'_{\delta_1} + dp \Sigma f'_{\delta_1} &= 0, \\ \cos \alpha \sin \alpha \, d\alpha + \cos \beta \sin \beta \, d\beta &= 0. \end{aligned}$$

L'élimination des différentielles $d\alpha, d\beta, dp$ donne

$$(4) \quad \frac{x - X}{\cos \alpha} = \frac{y - Y}{\cos \beta},$$

en posant

$$X = \frac{\Sigma x_1 f'_{\delta_1}}{\Sigma f'_{\delta_1}}, \quad Y = \frac{\Sigma y_1 f'_{\delta_1}}{\Sigma f'_{\delta_1}}.$$

Le point x_1, y_1 où la droite mobile touche son enveloppe est donc donné par l'intersection de cette droite et de la droite représentée par l'équation (4), c'est-à-dire, de la perpendiculaire abaissée du point X, Y , sur la droite mobile; or, ce point est le centre des distances proportionnelles des points fixes affectés, respectivement, des coefficients $f'_{\delta_1}, f'_{\delta_2}, \dots$

La démonstration et le résultat sont les mêmes si l'on remplace la droite mobile par un plan mobile, et si les n points fixes sont des points de l'espace. On peut donc énoncer les deux théorèmes suivants, qui ne sont peut-être pas connus :

THÉORÈME I. — *Si une droite se meut dans un plan de manière que les distances de n points fixes du plan à cette droite soient liées par la relation*

$$f(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) = 0,$$

on obtient le point où elle touche son enveloppe en projetant sur la droite le centre des distances proportionnelles des points fixes affectés des coefficients

$$f'_{\delta_1}, f'_{\delta_2}, \dots, f'_{\delta_n}.$$

THÉORÈME II. — *Même résultat pour un plan mobile et n points fixes de l'espace.*

Les cas les plus simples sont ceux où la relation $f = 0$ est

$$\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n = K,$$

ou

$$\delta_1^2 + \delta_2^2 + \dots + \delta_n^2 = K^2,$$

ou

$$\delta_1 \delta_2 \dots \delta_n = K^n,$$

K désignant une constante.

Dans le premier cas, et aussi dans le cas où l'on aurait

$$a_1 \delta_1 + a_2 \delta_2 + \dots + a_n \delta_n = K,$$

a_1, a_2, \dots , étant des constantes, le centre des distances proportionnelles est fixe, l'enveloppe est un cercle, résultat bien connu. Dans le second cas, l'enveloppe est une conique à centre, les coefficients de proportionnalité sont $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$. Dans le troisième cas, les coefficients sont $\frac{1}{\delta_1}, \frac{1}{\delta_2}, \dots, \frac{1}{\delta_n}$, l'enveloppe est une conique à centre pour $n = 2$ et, dans les autres cas, une courbe de degré élevé.