

R. GOORMAGHTIGH

**Sur un problème concernant des groupes  
de points sur l'hyperbole équilatère**

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 18  
(1918), p. 445-448

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1918\\_4\\_18\\_\\_445\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__445_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1918, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

[L'11 a]

**SUR UN PROBLÈME CONCERNANT DES GROUPES DE POINTS  
SUR L'HYPERBOLE ÉQUILATÈRE ;**

PAR M. R. GOORMAGHTIGH.

---

Soient  $A_1, B_1, C_1, D_1$  quatre points d'une hyperbole équilatère  $(H)$  d'équation  $xy = 1$ ; les orthocentres  $A_2,$

$B_2, C_2, D_2$  des triangles  $B_1 C_1 D_1, C_1 D_1 A_1, D_1 A_1 B_1, A_1 B_1 C_1$  sont quatre nouveaux points de (H); soient de même  $A_3, B_3, C_3, D_3$  les orthocentres des triangles  $B_2 C_2 D_2, C_2 D_2 A_2, D_2 A_2 B_2, A_2 B_2 C_2, \dots$  et ainsi de suite. M. Appell a donné le problème de chercher (*Nouv. Ann.*, 1918, p. 41) s'il est possible que le groupe  $A_n B_n C_n D_n$  coïncide en tout ou en partie avec le groupe initial  $A_1 B_1 C_1 D_1$ .

Désignons par  $a_i, b_i, c_i, d_i$  les abscisses des points  $A_i, B_i, C_i, D_i$ . On sait que, lorsque quatre points de (H) forment un groupe orthocentrique, le produit de leurs abscisses est égal à  $-1$ ; on aura donc

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{a_1}{a_1 b_1 c_1 d_1}, & b_2 &= -\frac{b_1}{a_1 b_1 c_1 d_1}, & \dots, \\ a_3 &= a_1^2 b_1^2 c_1^2 d_1^2 \times a_1, & b_3 &= a_1^2 b_1^2 c_1^2 d_1^2 \times b_1, & \dots, \\ a_4 &= -\frac{a_1}{a_1^3 b_1^3 c_1^3 d_1^3}, & b_4 &= -\frac{b_1}{a_1^3 b_1^3 c_1^3 d_1^3}, & \dots \end{aligned}$$

et, d'une manière générale, .

$$(1) \quad a_n = a_1 \times (-1)^{n-1} \times (a_1 b_1 c_1 d_1)^{k_n},$$

la loi de récurrence entre les  $k$  s'écrivant

$$k_n = -3k_{n-1} - 1:$$

on a, par conséquent,

$$(2) \quad k_n = \frac{(-3)^{n-1} - 1}{4}.$$

Les relations (1) et (2) permettent d'étudier complètement la question.

Observons d'abord qu'en raison de la proportionnalité de  $a_n, b_n, c_n, d_n$  et  $a_1, b_1, c_1, d_1$ , les côtés correspondants de deux quadrilatères  $A_n B_n C_n D_n$  et  $A_1 B_1 C_1 D_1$  sont parallèles, de sorte que, si  $A_n$  coïncide avec  $A_1$ , les autres points  $B_n, C_n, D_n$  coin-

cident respectivement avec  $B_1, C_1, D_1$ . En tenant compte de cette remarque, on voit que les manières essentiellement distinctes de réaliser la coïncidence complète des deux groupes  $A_1 B_1 C_1 D_1$  et  $A_n B_n C_n D_n$  sont les suivantes :

$$\begin{aligned} (3) \quad & A_n \equiv A_1, & B_n \equiv B_1, & C_n \equiv C_1, & D_n \equiv D_1, \\ (4) \quad & A_n \equiv C_1, & B_n \equiv D_1, & C_n \equiv A_1, & D_n \equiv B_1, \\ & A_n \equiv B_1, & B_n \equiv C_1, & C_n \equiv D_1, & D_n \equiv A_1, \end{aligned}$$

cette dernière solution n'étant d'ailleurs possible que si les points donnés  $A_1, B_1, C_1, D_1$  sont confondus.

En considérant le cas (3), on a ce premier résultat :

*Lorsque le produit  $\xi$  des abscisses des points  $A_1, B_1, C_1, D_1$  sera racine de l'équation*

$$\xi^{\frac{(-3)^n - 1}{4}} = (-1)^{n-1},$$

*il y aura coïncidence entre les groupes  $A_n B_n C_n D_n$  et  $A_1 B_1 C_1 D_1$ .*

Comme solutions réelles on retrouve d'abord, pour  $n = 2$ , le cas des groupes orthocentriques. Pour  $n = 3$ , on a pour le produit  $a_1 b_1 c_1 d_1$  les valeurs  $-1$  et  $+1$ ; la première correspond encore au cas des groupes orthocentriques; la seconde donne lieu à la solution dans laquelle chaque groupe  $A_i B_i C_i D_i$  est le symétrique du groupe précédent  $A_{i-1} B_{i-1} C_{i-1} D_{i-1}$  par rapport au centre de (H).

On voit ensuite que la coïncidence (4) sera réalisée si l'on a

$$(a_1 b_1)^{\frac{(-3)^n - 1}{2}} = (-1)^n$$

*et si l'on prend en outre  $c_1 = -a_1, d_1 = -b_1$ .*

Enfin on étudiera de la même façon, au moyen des relations (1), (2), la coïncidence partielle de deux

groupes  $A_1 B_1 C_1 D_1$  et  $A_n B_n C_n D_n$  en considérant les équations qui expriment l'égalité de certaines abscisses  $a_1, b_1, c_1, d_1$  et  $a_n, b_n, c_n, d_n$ ; rappelons seulement que, d'après une remarque faite plus haut, il sera impossible de réaliser une coïncidence partielle dans laquelle deux points correspondants,  $A_1$  et  $A_n$  par exemple, seraient confondus, car alors les autres points correspondants  $B_1$  et  $B_n, C_1$  et  $C_n, D_1$  et  $D_n$  coïncident nécessairement.

REMARQUE. — On peut remarquer que la condition  $a_1 b_1 c_1 d_1 = +1$  signifie que les quatre points correspondants sont sur un cercle.