

R. GOORMAGHTIGH

**Sur les troisième et quatrième centres de courbure des courbes de Cesàro**

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 18 (1918), p. 441-445

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1918\\_4\\_18\\_\\_441\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__441_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1918, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

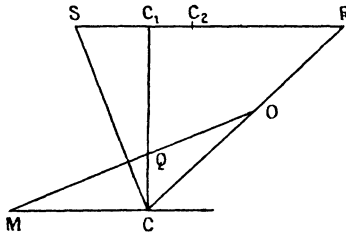
Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[ M' 3 i ]  
**SUR LES TROISIÈME ET QUATRIÈME CENTRES DE COURBURE  
 DES COURBES DE CESÀRO ;**

PAR M. R. GOORMAGHTIGH.

1. Soient  $M$  un point d'une courbe de Cesàro  $\Gamma$  d'indice  $n$ , dont le cercle directeur a pour centre  $O$  et pour rayon  $r$ , et  $C, C_1, C_2, C_3$  les quatre premiers centres de courbure successifs de  $\Gamma$  correspondant au point  $M$ . La connaissance des éléments  $n, O, r$  entraîne celle des deux premiers centres de courbures  $C$  et  $C_1$ .



En effet, si  $P$  désigne le point où la polaire de  $M$  par rapport au cercle directeur rencontre  $MC$ , on a

$$\overline{CP} = n \overline{MC};$$

d'autre part, si l'on appelle  $Q$  le point d'intersection du rayon vecteur  $OM$  avec  $CC_1$ , on a

$$\overline{CC_1} : \overline{CQ} = (1 - n) : (1 + n).$$

Proposons-nous de déterminer le troisième centre de courbure  $C_2$  correspondant au point  $M$  de  $\Gamma$ . Prenons comme axes mobiles des  $x$  et des  $y$  la tangente et la

normale au point C de la développée  $\Gamma'$  et  $\Gamma$ , la direction positive de l'axe des  $x$  ayant le sens de la semi-droite MC, celle de l'axe des  $y$  ayant le sens de la semi-droite  $CC_1$ . Soient  $\rho$  et  $s$  le rayon de courbure et l'arc de  $\Gamma'$  en C, l'origine des arcs comptés sur  $\Gamma'$  étant choisie de manière que les coordonnées de M soient  $(-s, O)$ ; désignons encore par  $\alpha$  et  $\beta$  les coordonnées variables du pôle fixe O et posons  $\lambda = (1 - n) : (1 + n)$ . Les équations de OM et  $C_1C_2$  s'écrivent alors

$$\begin{aligned} & \beta x - (\alpha + s)y + \beta s = 0, \\ (1) \quad & f(x, y, s) \equiv (\alpha + s)y - \lambda \beta s = 0. \end{aligned}$$

Les coordonnées du point  $C_2$  où  $C_1C_2$  touche son enveloppe s'obtiennent en résolvant le système formé par (1) et l'équation

$$(2) \quad (y - \rho) \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} + \rho \frac{\partial f}{\partial s} = 0,$$

ou

$$(3) \quad -(\alpha + s)x + \rho \left( \frac{dx}{ds} + 1 \right) y - \lambda \rho s \frac{d\beta}{ds} - \lambda \beta \rho = 0.$$

Or, le point O étant fixe, on a, d'après les formules de Cesàro,

$$(4) \quad \frac{dx}{ds} = \frac{\beta}{\rho} - 1, \quad \frac{d\beta}{ds} = -\frac{x}{\rho}.$$

L'équation (3) s'écrit donc

$$(\alpha + s)x - \beta y + \lambda \beta \rho - \lambda \alpha s = 0.$$

En y faisant  $y = \rho$ , on trouve l'abscisse de  $C_2$  et l'on en déduit facilement la construction suivante :

*Si OC et la perpendiculaire abaissée de C sur OM coupent  $C_1C_2$  en R et S, le segment  $\overline{RC_2}$  vaut  $\frac{2n}{n+1} \overline{SC_1}$ .*

Le cas des cycloïdales correspond à  $n = 0$ ; on retrouve que le premier et le troisième centres de courbure sont collinéaires avec le pôle.

Pour  $n = -2$ , on obtient cette construction du troisième centre de courbure en un point  $M$  d'une conique de centre  $O$ , si l'on suppose construits les deux premiers centres de courbure  $C$  et  $C_1$  :

*La droite  $OC$  et la perpendiculaire abaissée de  $C$  sur  $OM$  coupent  $C_1C_2$  en  $R$  et  $S$ ;  $C_2$  est le point obtenu en portant sur  $\overline{RC_1}$  le segment  $\overline{RC_2}$  égal à  $\frac{1}{2}\overline{SC_1}$ .*

Remarquons que les considérations qui précèdent sont également applicables au cas limite de la chaînette d'égale résistance; le point  $O$  est alors à l'infini et l'on a  $\lambda = -1$ .

2. La construction générale obtenue plus haut s'applique en particulier aux spirales sinusoides et aux courbes de Ribaucour; rappelons, au sujet de ces courbes, que Cesàro a donné <sup>(1)</sup> une construction du troisième centre de courbure pour une autre classe générale de courbes qui les comprend également comme cas particuliers; ce sont les courbes définies par l'équation intrinsèque

$$(5) \quad s = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{1}{m} \left[ \left( \frac{\rho}{a} \right)^{2m} - 1 \right]}}.$$

Pour ces courbes, le troisième centre de courbure  $C_2$  s'obtient de la manière suivante :

*Soient  $L$  le point qui divise  $CM$  dans le rapport*

(1) *Natürliche Geométrie*, p. 77.

de  $l$  à  $1-l$  et  $K$  le point qui divise  $CC_1$  dans le rapport de  $(m+1)l$  à  $1-(m+1)l$ ; la perpendiculaire élevée en  $L$  sur  $LK$  passe par le troisième centre de courbure cherché.

3. *Courbes de Cesàro osculatrices.* — Une courbe de Cesàro  $\Gamma$  d'indice donné  $n$  oscule une courbe quelconque  $\gamma$  en un point  $M$  quand elle a avec celle-ci un contact quintiponctuel en  $M$ ; alors les trois premiers centres de courbure de  $\Gamma$  et  $\gamma$  en  $M$  coïncident. On a donc cette construction pour le pôle  $O$  de la courbe de Cesàro, d'indice donné  $n$ , qui oscule une courbe  $\gamma$  en un point  $M$ , connaissant les trois premiers centres de courbure de  $\gamma$  en  $M$ :

Soient  $Q$  le point qui divise  $CC_1$  dans le rapport de  $1+n$  à  $2n$ ,  $S$  le point où la perpendiculaire abaissée de  $C$  sur  $MQ$  coupe  $C_1C_2$ ,  $R$  le point obtenu en prenant  $\overline{C_2R}$  égal à  $\frac{2n}{n+1}C_1S$ ; la droite  $CR$  coupe  $MQ$  au pôle cherché.

En particulier, quand on construit le centre de la conique qui oscule une courbe donnée en  $M$ , le segment  $\overline{C_2R}$  vaut  $\frac{2}{3}C_1S$ .

4. En dérivant sous la forme (2) l'équation

$$(\alpha + s)x + \mu\beta\rho - \lambda\alpha s = 0 \quad (\mu = \lambda - 1)$$

de la parallèle à  $CC_1$  menée par  $C_2$ , et en tenant compte des relations (4), on trouve

$$(\alpha + s)(y - \rho) + \beta x - \mu\alpha\rho + \mu\beta\rho \frac{d\rho}{ds} - \lambda\alpha\rho - \lambda\beta s + \lambda\rho s = 0.$$

En remarquant que  $C_3$  a pour abscisse  $-\rho \frac{d\rho}{ds}$ , on voit que ce point appartient à la droite

$$(\alpha + s)y - (\lambda - 2)\beta x - \rho[(2\lambda + 1)\alpha - (\lambda - 2)s] = 0.$$

On déduit de là cette construction du point  $C_3$  :

*Soient  $a$  et  $a'$  les projections de  $O$  sur  $MC$  et  $C_1C_2$ ,  $g, h, k$  les points qui divisent  $Oa$  dans le rapport de  $2(1+2n)$  à  $1+3n$ ,  $aa'$  dans le rapport de  $1+3n$  à  $2n$ ,  $Ma$  dans le rapport de  $3-n$  à  $1+3n$ . La parallèle à  $Mg$  menée par l'intersection de  $CC_1$  et  $kh$  passe par  $C_3$ .*

§. *Quatrième centre d'une classe de courbes remarquables.* — La construction précédente s'applique en particulier aux spirales sinusoïdes et aux courbes de Ribaucour. On obtient une construction plus simple pour le quatrième centre de courbure de ces courbes en les considérant comme cas spéciaux des courbes (5). En dérivant l'équation (5) trois fois par rapport à  $s$ , on obtient une relation dont on déduit aisément cette construction du quatrième centre de courbure d'une courbe (5) :

*Le centre de courbure cherché appartient à la droite qui joint le point qui divise le premier rayon de courbure dans le rapport de  $2(l+m)$  à  $2l-1$  à celui qui divise le deuxième rayon de courbure dans le rapport de  $(2l-1)$  à  $2l$ .*