

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 18 (1918), p. 434-438

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__434_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1918, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1730.

(1896, p. 218).

Si

$$x_1 = \sqrt{a-b}, \quad x_2 = -\sqrt{b-c},$$

$$x_3 = \sqrt{c-d}, \quad x_4 = -\sqrt{d-a},$$

et si

$$S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n + x_4^n,$$

montrer que

$$\frac{S_5}{5} + \frac{S_1^2}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{S_1^2 S_3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{S_1 S_4}{4}.$$

H.-J. GERRANS.

SOLUTION

Par M. H. BROCARD.

Soit

$$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0$$

l'équation ayant pour racines les quantités ci-dessus désignées.

On a les relations classiques d'Albert Girard et de Newton

$$S_1 - A = 0,$$

$$S_2 - AS_1 + 2B = 0,$$

$$S_3 - AS_2 + BS_1 - 3C = 0,$$

$$S_4 - AS_3 + BS_2 - CS_1 + 4D = 0,$$

$$S_5 - AS_4 + BS_3 - CS_2 + DS_1 = 0.$$

En y faisant $S_2 = 0$, puis éliminant A, B, C, D entre ces cinq équations, on parvient aisément à la formule indiquée

ou encore à

$$2iS_3 + 20S_1^2S_3 + S_1^4 = 30S_1S_3.$$

NOTE. -- Après lecture de cette solution très simple, on pourra s'étonner qu'elle se soit fait attendre plus de vingt ans. Le motif en est peut-être, d'après une suggestion de M. Laisant, un vain semblant de précision donné dans l'énoncé aux quantités x_1, x_2, x_3, x_4 , affectées de signes distincts, parfaitement inutiles, et qui ont été spécifiés pour arrêter, embrouiller et faire hésiter le lecteur.

D'autre part, il est bien singulier aussi d'introduire une somme de carrés identiquement égale à zéro. Quelles que soient les racines x_1, x_2, x_3, x_4 supposées numériques, leurs carrés doivent être positifs, et pour que la somme desdits carrés soit nulle, il faut que l'un d'eux au moins soit négatif, d'où une contradiction ou une impossibilité apparente.

Soient a, b, c, d quatre quantités quelconques réelles, rangées dans leur ordre de grandeur

$$a > b > c > d.$$

On aura

$$x_1 = \pm \sqrt{a-b}, \quad x_2 = \pm \sqrt{b-c}, \quad x_3 = \pm \sqrt{c-d},$$

quantités réelles, mais

$$x_4 = \pm \sqrt{d-a}$$

est imaginaire (et sans conjuguée).

Si au contraire

$$a < b < c < d,$$

une seule des quantités x_i sera réelle et les trois autres seront imaginaires.

Dans l'un et l'autre cas, il y aura un nombre impair d'imaginaires, ce qui s'oppose à l'existence d'imaginaires conjuguées pour représenter les racines imaginaires d'une équation à coefficients réels. Il faudra donc alors que l'équation considérée ait des coefficients imaginaires, ce qui est une nouvelle contradiction.

La condition $\Sigma x^2 = 0$ est artificielle, car si l'on a, en quantités littérales,

$$(\pm \sqrt{a-b})^2 + (\pm \sqrt{b-c})^2 + (\pm \sqrt{c-d})^2 + (\pm \sqrt{d-a})^2 = 0,$$

cette identité algébrique ne se vérifie pas et même est impossible en nombres réels.

Il n'y a donc pas, à vrai dire, d'équation algébrique réelle, du quatrième degré, dont les quatre racines aient zéro pour somme de leurs carrés.

L'exercice 1730 a probablement été forgé de toutes pièces comme curiosité algébrique ne correspondant à aucune réalité.

1847.

(1900, p. 101; 1917, p. 359).

Un fil homogène de longueur l , dont le poids par unité de longueur est π , est attaché par un de ses extrémités à un point fixe, tandis que l'extrémité libre porte un poids p . Ce fil est soumis à l'action du vent soufflant horizontalement avec une intensité et dans une direction constantes. On admet que la pression du vent sur chaque élément infiniment petit du fil est proportionnelle au carré de la composante normale de la vitesse, et l'on demande de déterminer la forme d'équilibre du fil. Examiner ce que devient cette forme d'équilibre dans le cas où $p = 0$.

M. D'OCAGNE.

SOLUTION

Par M. PHILBERT DU PLESSIS.

Si α est l'angle de la normale au fil sur l'horizon, m une constante, T la tension du fil, les équations d'équilibre s'écrivent

$$(1) \quad \frac{dT}{ds} = \pi \cos \alpha,$$

$$(2) \quad T \frac{d\alpha}{ds} = m \cos^2 \alpha - \pi \sin \alpha,$$

d'où, si l'on pose $\frac{\pi}{m} = 2k$,

$$(3) \quad \frac{dT}{T} = \frac{2k \cos \alpha \, d\alpha}{\cos^2 \alpha - 2k \sin \alpha};$$

équation dont l'intégrale est

$$(4) \quad T = C \left(\frac{\sqrt{1+k^2} + k + \sin \alpha}{\sqrt{1+k^2} - k - \sin \alpha} \right)^{\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}},$$

où C est une constante arbitraire.

Si l'on suppose l'origine des arcs prise à l'extrémité libre A, la tangente en ce point étant verticale et la tension égale à p , on détermine la constante C en écrivant que, pour $\alpha = 0$, on doit avoir $T = p$, ce qui donne

$$(5) \quad \frac{T}{p} = \left[\frac{1 + (\sqrt{1+k^2} - k) \sin \alpha}{1 - (\sqrt{1+k^2} + k) \sin \alpha} \right]^{\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}.$$

On aura ensuite l'arc s et les coordonnées x et y (rapportées à l'horizontale et à la verticale de l'extrémité libre) au moyen des équations

$$(6) \quad ds = \frac{dT}{m \sin \alpha}, \quad dx = \frac{dT}{m}, \quad dy = \frac{dT}{m} \tan \alpha,$$

eu égard à ce que, pour $\alpha = 0$, on doit avoir $s = x = y = 0$.

Soit α_0 l'angle aigu défini par l'équation

$$(7) \quad \sin \alpha_0 = \sqrt{1+k^2} - k.$$

L'angle α reste toujours inférieur à α_0 , sans quoi, d'après (4), T deviendrait infinie, résultat impossible puisque T, en vertu de (1), est toujours inférieure à $p + ms$.

On voit ainsi que la courbe n'a pas de point d'inflexion, car, T restant finie, $\frac{dx}{ds}$, en vertu de (2), ne peut s'annuler que pour $m \cos^2 \alpha - m \sin \alpha = 0$, ou $\cos^2 \alpha - 2k \sin \alpha = 0$, équation qui donne précisément $\sin \alpha = \sin \alpha_0$.

Remarquons enfin que le rayon de courbure à l'extrémité libre A, valeur de $\frac{ds}{d\alpha}$ pour $\alpha = 0$, est égal à $\frac{p}{m}$.

Supposons maintenant que p devienne infiniment petit. Le rayon de courbure en A tend également vers zéro; c'est-à-dire qu'au voisinage de ce point la tangente peut tourner d'un angle fini pour un déplacement infiniment petit le long du fil. D'autre part, la formule (4) montre que (la constante C devenant infiniment petite avec p) la tension T est infiniment petite à moins que le dénominateur $\sqrt{1+k^2} - k - \sin \alpha$ ne soit lui-même infiniment petit. Or, en vertu de (1), la tension est finie dès que s est finie. Il en résulte que, pour tous les points à distance finie de A, l'angle α diffère infiniment peu de la constante α_0 . A la limite, en faisant $p = 0$, on trouve

que la forme d'équilibre ne peut différer d'une ligne droite faisant l'angle α_0 avec la verticale. Effectivement, cet angle constant donne pour $\frac{dx}{ds}$ et pour $m \cos^2 \alpha - \pi \sin \alpha$ des valeurs nulles qui vérifient l'équation (2). Quant à l'équation (1) elle fait connaître la tension qui est $T = \pi s \cos \alpha_0$.

L'angle α_0 est nul pour $k = \infty$ (absence de vent) et égal à $\frac{\pi}{2}$ pour $k = 0$ (vent infini).