MATHIEU WEILL

Quelques applications géométriques de la théorie des infiniment petits

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 18 (1918), p. 424-429

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__424_1>

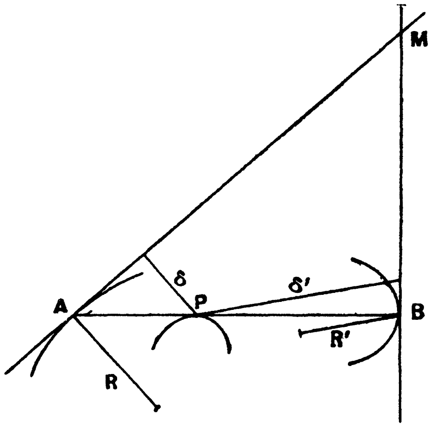
[O'2]

QUELQUES APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA THÉORIE DES INFINIMENT PETITS;

PAR M. MATHIEU WEILL.

I. Les extrémités A et B d'un segment de droite de grandeur variable décrivent des courbes données et la droite AB touche son enveloppe en P. On mène en A et B les tangentes aux courbes décrites par A et B, soit M leur point de rencontre. On aura la tangente à

Fig. 1.



la courbe, décrite par M, au moyen de la relation suivante :

$$\overline{PA}^2.\overline{AM}^2\delta'.h'.R' = \overline{PB}^2.\overline{BM}^2.\delta.h.R,$$

R et R' étant les rayons de courbure en A et B, δ et δ' les distances de P à AM et à MB, h et h' les distances de A et B à la tangente en M.

Ce théorème se démontre facilement en faisant tourner une droite AB autour d'un point fixe P, A et B décrivant des cercles de rayons R et R'.

Applications. — 1° AB se déplace sur une courbe, de manière que l'arc AB soit de longueur constante. Les projections des rayons de courbure en A et B sur la tangente en M sont proportionnelles à MA et MB.

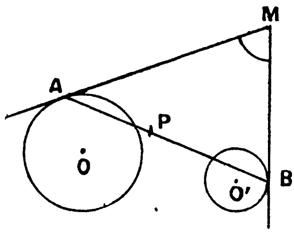
2° Le segment AB est de grandeur constante. Les projections des rayons de courbure en A et B sur la tangente en M sont proportionnelles aux carrés de MA et MB.

3° L'angle AMB est constant. Le point P divise AB en deux segments proportionnels aux projections sur AB des rayons de courbure en A et B, et l'on a

$$\frac{PA}{PB} \times \frac{MA}{MB} = \frac{R}{R'}.$$

Considérons, en particulier, un angle de grandeur constante, circonscrit à deux cercles; on sait que M décrit un limaçon de Pascal, et que AB enveloppe une

Fig. 2.



conique; on a donc un moyen simple de trouver le point P où cette droite touche la conique enveloppe. La construction de P est encore plus simple si les deux cercles sont égaux.

On peut aussi, comme cas particuliers, considérer un angle droit circonscrit à une conique à centre, ou un angle constant circonscrit à une parabole.

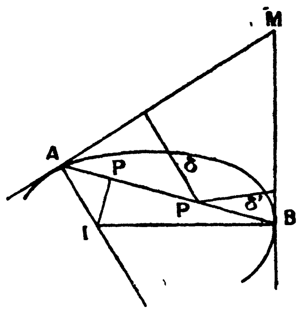
II. Un segment de droite AB, variable de grandeur et de position, se déplace de telle manière qu'un élément géométrique, dépendant de la droite, demeure constant. Soit f cet élément.

On demande la condition pour qu'un autre élément φ, dépendant de la droite, soit maximum ou minimum.

Pour obtenir cette condition, on cherchera le point où la droite AB touche son enveloppe, l'élément f étant constant, puis le point où AB touche son enveloppe, l'élément φ étant constant; puis on exprimera que ces deux points coïncident. Ce principe, évident, s'applique aussi au cas où la droite est remplacée par une courbe.

Applications. — 1° Une droite AB, de longueur

Fig. 3.



constante, se déplace de manière que A et B décrivent une courbe donnée. Condition pour que l'arc AB soit maximum ou minimum.

Le point P′ où AB touche son enveloppe, si l'arc AB est constant, est donné par la relation

$$\frac{\overline{P'A}^2}{\overline{P'B}^2} = \frac{\delta}{\delta'};$$

cette relation s'obtient en considérant les surfaces des triangles infiniment petits P′AA′, P′BB′, A′B′ étant une position de la droite, infiniment voisine de AB.

On déduit de cette relation

$$\frac{P'A}{P'B} = \frac{MB}{MA}.$$

D'autre part, le point P, où AB touche son enveloppe, AB étant de grandeur constante, est donné par la projection sur AB du point I où se rencontrent les normales en A et B.

En exprimant que P et P' se confondent, on trouve MA = MB, résultat très simple. Même résultat si AB se déplace de manière que l'arc AB reste constant, et si l'on demande le minimum ou le maximum de la corde AB.

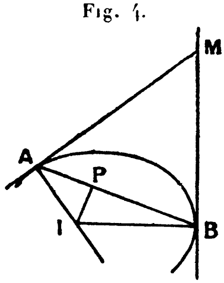
2° Une droite AB de longueur constante se déplace, trouver la condition pour qu'elle détache, dans la courbe, un segment de surface maximum ou minimum.

Il faut que la projection P sur AB du point I, centre instantané de rotation, soit au milieu de AB.

3° L'angle $\widehat{AMB}$ est constant; quelle est la condition pour que l'arc AB soit maximum ou minimum. On trouve que les rayons de courbure en A et B doivent être égaux.

4° L'angle $\widehat{AMB}$ est constant; quelle est la condition pour que le segment de la courbe détaché par AB

Fig. 4.



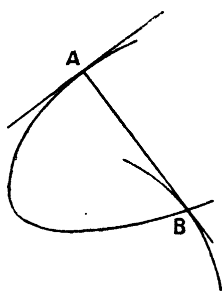
ait une surface maximum ou minimum? P doit être au milieu de AB; on a donc

$$\frac{MA}{MB} = \frac{R}{R'}.$$

5° Une droite AB de longueur constante se déplace et rencontre une circonférence donnée en A et A′, et une autre circonférence donnée en B et B′. La condition pour que la somme des arcs AA′, BB′ soit maximum ou minimum est que AB passe par un des centres de similitude des deux circonférences. Ce résultat se démontre en remarquant que les tangentes en A et B doivent être égales, ainsi que les tangentes en A′ et B′, d'après ce qui précède.

6° Normale à une courbe, de grandeur maximum ou minimum. Soit en A la normale qui rencontre la courbe en un second point B; le point où la normale touche son enveloppe doit coïncider avec la projection sur AB du centre instantané de rotation, AB étant une droite de longueur constante, se déplaçant de manière que A et B décrivent la courbe; cette projection est, ici, le point B; donc, la normale maximum ou minimum est

Fig. 5.



celle qui rencontre la courbe en un point B où cette courbe est rencontrée par sa développée; ce résultat est intéressant dans le cas des coniques.