

P. APPELL

**Groupes de points sur l'hyperbole  
équilatère ; exercice proposé**

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 18  
(1918), p. 41-42

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1918\\_4\\_18\\_\\_41\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__41_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1918, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[L<sup>141</sup>a]

**GROUPES DE POINTS SUR L'HYPERBOLE ÉQUILATÈRE;  
EXERCICE PROPOSÉ;**

PAR M. P. APPELL.

*Problème.* — Soient quatre points pris sur une hyperbole équilatère  $A_1, B_1, C_1, D_1$ ; les hauteurs du triangle  $B_1 C_1 D_1$  se coupent en un point  $A_2$  situé sur l'hyperbole, de même les hauteurs de  $C_1 D_1 A_1$  se coupent en un point  $B_2$  de la courbe, etc. On déduit ainsi des quatre points  $A_1, B_1, C_1, D_1$ , quatre nouveaux points  $A_2, B_2, C_2, D_2$ ; de même de ces quatre points on en déduira quatre autres  $A_3, B_3, C_3, D_3, \dots$  et ainsi de suite. Étudier la suite de ces groupes de points : est-il possible que le groupe  $A_n, B_n, C_n, D_n$  coïncide en tout ou en partie avec  $A_1, B_1, C_1, D_1$ .

*Indications sur la solution.* — L'étude générale des groupes de points sur une courbe algébrique se rattache au théorème d'Abel. Le problème actuel se traite d'une façon élémentaire, à l'aide de la fonction exponentielle.

Soit  $xy = 1$  l'équation de la courbe rapportée à ses asymptotes; chaque point est défini par son abscisse. Si les sommets d'un triangle ont pour abscisses  $x', x'', x'''$ , le point de concours des hauteurs a une abscisse  $x$  donnée par

$$xx'x''x''' = -1.$$

Posons pour un point de la courbe

$$x = e^t, \quad y = e^{-t}.$$

Les quatre premiers points  $A_1, B_1, C_1, D_1$  correspondent à des valeurs de  $t$  :  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ . On a ensuite, en appelant  $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n$  les valeurs de  $t$  correspondant à  $A_n, B_n, C_n, D_n$ ,

$$\alpha_2 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 = \pi i.$$

$$\beta_2 + \gamma_1 + \delta_1 + \alpha_1 \equiv \pi i.$$

$$\gamma_2 + \delta_1 + \alpha_1 + \beta_1 \equiv \pi i,$$

$$\delta_2 + \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \equiv \pi i$$

et en général

$$\alpha_{p+1} + \beta_p + \gamma_p + \delta_p \equiv \pi i.$$

$$\beta_{p+1} + \gamma_p + \delta_p + \alpha_p \equiv \pi i,$$

$$\gamma_{p+1} + \delta_p + \alpha_p + \beta_p \equiv \pi i,$$

$$\delta_{p+1} + \alpha_p + \beta_p + \gamma_p \equiv \pi i.$$

le  $\equiv$  signe  $\equiv$  indiquant une égalité à des multiples de  $2\pi i$  près. Si l'on pose

$$S_n = \alpha_n + \beta_n + \gamma_n + \delta_n,$$

on a

$$S_{p+1} + 3S_p \equiv \sigma,$$

formule qui permet de calculer  $S_n$ . On a ensuite

$$\alpha_{p+1} - \alpha_p + S_p \equiv \pi i,$$

$$\beta_{p+1} - \beta_p + S_p \equiv \pi i,$$

$$\gamma_{p+1} - \gamma_p + S_p \equiv \pi i,$$

$$\delta_{p+1} - \delta_p + S_p \equiv \pi i.$$