NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

P. APPELL

Groupes de points sur l'hyperbole équilatère ; exercice proposé

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 18 (1918), p. 41-42

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__41_0>

[L¹11a]

GROUPES DE POINTS SUR L'HYPERBOLE ÉQUILATÈRE; EXERCICE PROPOSÉ;

PAR M. P. APPELL.

Problème. — Soient quatre points pris sur une hyperbole équilatère A_1, B_1, C_1, D_1; les hauteurs du triangle $B_1\ C_1\ D_1$ se coupent en un point A_2 situé sur l'hyperbole, de même les hauteurs de $C_1\ D_1\ A_1$ se coupent en un point B_2 de la courbe, etc. On déduit ainsi des quatre points A_1, B_1, C_1, D_1, quatre nouveaux points A_2, B_2, C_2, D_2; de même de ces quatre points on en déduira quatre autres A_3, B_3, C_3, D_3, ... et ainsi de suite. Étudier la suite de ces groupes de points : est-il possible que le groupe A_n, B_n, C_n, D_n coïncide en tout ou en partie avec A_1, B_1, C_1, D_1.

Indications sur la solution. — L'étude générale des groupes de points sur une courbe algébrique se rattache au théorème d'Abel. Le problème actuel se traite d'une façon élémentaire, à l'aide de la fonction exponentielle.

Soit $xy = 1$ l'équation de la courbe rapportée à ses asymptotes; chaque point est défini par son abscisse. Si les sommets d'un triangle ont pour abscisses x', x'', x''', le point de concours des hauteurs a une abscisse x donnée par

$$xx'x''x''' = -1.$$

Posons pour un point de la courbe

$$x = e^{t}, \qquad y = e^{-t}.$$

Les quatre premiers points A_1, B_1, C_1, D_1 correspondent à des valeurs de t : α_1, β_1, γ_1, δ_1. On a ensuite, en appelant α_n, β_n, γ_n, δ_n les valeurs de t correspondant à A_n, B_n, C_n, D_n,

$$\alpha_2 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 \equiv \pi i,$$

$$\beta_2 + \gamma_1 + \delta_1 + \alpha_1 \equiv \pi i,$$

$$\gamma_2 + \delta_1 + \alpha_1 + \beta_1 \equiv \pi i,$$

$$\delta_2 + \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \equiv \pi i$$

et en général

$$\alpha_{p+1} + \beta_p + \gamma_p + \delta_p \equiv \pi i,$$
$$\beta_{p+1} + \gamma_p + \delta_p + \alpha_p \equiv \pi i,$$
$$\gamma_{p+1} + \delta_p + \alpha_p + \beta_p \equiv \pi i,$$
$$\delta_{p+1} + \alpha_p + \beta_p + \gamma_p \equiv \pi i,$$

le signe $\equiv$ indiquant une égalité à des multiples de $2\pi i$ près. Si l'on pose

$$S_n = \alpha_n + \beta_n + \gamma_n + \delta_n,$$

on a

$$S_{p+1} + 3S_p \equiv 0,$$

formule qui permet de calculer S_n. On a ensuite

$$\alpha_{p+1} - \alpha_p + S_p \equiv \pi i,$$

$$\beta_{p+1} - \beta_p + S_p \equiv \pi i,$$

$$\gamma_{p+1} - \gamma_p + S_p \equiv \pi i,$$

$$\delta_{p+1} - \delta_p + S_p \equiv \pi i.$$