

R. BOUVAIST

Sur les courbes algébriques planes

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 18
(1918), p. 403-417

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__403_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1918, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[M¹]

SUR LES COURBES ALGÈBRIQUES PLANES;

PAR M. R. BOUVAIST.

Je me propose de donner des démonstrations simples d'un certain nombre de théorèmes très généraux sur les courbes algébriques planes, dus à Laguerre (*Comptes rendus*, 1865; *Œuvres*, p. 19), théorèmes que cet éminent géomètre s'est borné à énoncer très brièvement, sans donner aucun éclaircissement sur la façon d'y parvenir.

Je définirai tout d'abord une transformation corrélative, qui me sera très utile.

Transformation corrélative. — Soit un système d'axes rectangulaires Ox, Oy ; à tout point x, y du plan je fais correspondre une droite u, v, w , telle que l'on ait

$$\frac{x}{u + iv} = \frac{y}{v + iu} = \frac{z}{w}$$

et réciproquement

$$\frac{x - iy}{u} = \frac{y - ix}{v} = \frac{z}{w}.$$

On voit immédiatement qu'aux points cycliques correspondent les axes de coordonnées et qu'à deux droites du plan faisant entre elles un angle V , correspondent deux points tels que les coefficients angulaires des droites qui les joignent à l'origine O , soient liés par la relation $\frac{m_1}{m_2} = e^{2iv}$.

Distance de deux points. — Soient, x_1, y_1, x_2, y_2 deux points; $u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2$ les droites correspondantes; la distance δ des deux points considérés est

$$\delta = [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{\frac{1}{2}},$$

elle se transformera en la relation

$$\delta = \left[i \left(\frac{u_1}{w_1} - \frac{u_2}{w_2} \right) \left(\frac{v_1}{w_1} - \frac{v_2}{w_2} \right) \right]^{\frac{1}{2}},$$

ou, en désignant par A et B, C et D les intersections de $u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2$ avec Ox et Oy ,

$$\delta = \left[i \left(\frac{1}{OA} - \frac{1}{OC} \right) \left(\frac{1}{OB} - \frac{1}{OD} \right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

En particulier, à un point situé à une distance ρ de l'origine correspondra une droite coupant Ox et Oy en A et B tels que

$$\rho = \left[i \frac{1}{OA} \frac{1}{OB} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Distance d'un point à une droite. — Soient $(a) = (Ax + By + C) = 0$ une droite, $B(x_1, y_1)$ un point; la distance de B à (a) a pour expression

$$\delta = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}};$$

à (a) correspond un point A (x_2, y_2) , à B une droite (b) , u_1, v_1, w_1 , et l'on voit que

$$\delta = \frac{ux_2 + vy_2 + w}{w\sqrt{-4ix_2y_2}} = \frac{\delta_1}{\delta_0} \frac{1}{\sqrt{-4iO\alpha O\beta}},$$

δ_1 étant la distance de A à (b) , δ_0 la distance de O à (b) et α et β les projections de A sur les axes.

En particulier, la distance δ de l'origine à la droite (a)

$\delta = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ devient $\delta = \frac{1}{\sqrt{-4ixy}}$, x, y étant les coordonnées de A.

Puissance d'un point par rapport à une courbe.
— Soit

$$f(x, y) = \varphi_m(x, y) + \varphi_{m-1}(x, y) + \dots + \varphi_0 = 0$$

une courbe de degré m , $\varphi_i(x, y)$ étant un polynôme homogène de degré i en x et y ; nous définirons *puissance du point* $x_0 y_0$ par rapport à cette courbe l'expression

$$\Pi = \frac{2^m f(x_0 y_0)}{[\varphi_m(1, i) \varphi_m(1, -i)]^{\frac{1}{2}}};$$

au cas où la courbe considérée est circulaire, la puissance

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{2^{m-2p} f(x_0 y_0)}{[\varphi_{m-2p}(1, i) \varphi_{m-2p}(1, -i)]^{\frac{1}{2}}} - \varphi_m(x, y) \\ &= (x^2 + y^2)^p \varphi_{m-2p}(x, y). \end{aligned}$$

A la courbe $f(x, y) = 0$ correspondra dans la transformation indiquée une courbe dont l'équation tangentielle sera, si l'on pose $\lambda = \frac{u}{\omega}$, $\mu = \frac{v}{\omega}$,

$$\begin{aligned} F(\lambda, \mu) &= \varphi_m(\lambda + i\mu, \mu + i\lambda) + 2\varphi_{m-1}(\lambda + i\mu, \mu + i\lambda) + \dots + 2^m \varphi_0, \\ F(\lambda, \mu) &= \Phi_m(\lambda, \mu) + 2\Phi_{m-1}(\lambda, \mu) + \dots + 2^m \varphi_0; \end{aligned}$$

nous définirons *puissance de la droite* $\lambda_0 x + \mu_0 y + 1 = 0$ par rapport à cette courbe, l'expression

$$\Pi' = \frac{F(\lambda_0, \mu_0)}{|\Phi_m(1, 0) \Phi_m(0, 1)|^{\frac{1}{2}}},$$

et l'on voit facilement que la puissance Π d'un point $x_0 y_0$ par rapport à $f(x, y) = 0$ et la puissance Π' de la

droite correspondante $\lambda_0 x + \mu_0 y + 1 = 0$ par rapport à la courbe transformée sont liées par la relation

$$\Pi^2 = \Pi'^2(i)^m.$$

Remarquons enfin que la puissance de la droite de l'infini par rapport à la courbe $F(\lambda, \mu) = 0$ est égale à $\frac{\Phi_0}{(A_0 A_m)^{\frac{1}{2}}}$, Φ_0 étant le terme constant de l'équation, A_0 et A_m les coefficients λ^m et μ^m .

Nous démontrerons maintenant la *proposition suivante* :

Soient $f(x, y, z) = 0$, $\varphi(x, y, z) = 0$ deux équations homogènes et de degrés m et n ; désignons par

$$\begin{cases} R_{z=0}(f, \varphi), \\ R_{x=0}(f, \varphi), \\ R_{y=0}(f, \varphi) \end{cases}$$

les résultats des trois systèmes d'équations

$$\begin{cases} f(x, y, 0) = 0, \\ \varphi(x, y, 0) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} f(0, y, z) = 0, \\ \varphi(0, y, z) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} f(x, 0, z) = 0, \\ \varphi(x, 0, z) = 0; \end{cases}$$

si x et y représentent des coordonnées cartésiennes, les équations $f = 0$, $\varphi = 0$ représentent deux courbes planes, les produits des abscisses et des ordonnées des points communs à ces deux courbes sont donnés par les expressions

$$\begin{aligned} x_1 x_2 \dots x_{mn} &= (-1)^{mn} \frac{R_{x=0}(f, \varphi)}{R_{z=0}(f, \varphi)}, \\ y_1 y_2 \dots y_{mn} &= (-1)^{mn} \frac{R_{y=0}(f, \varphi)}{R_{z=0}(f, \varphi)}. \end{aligned}$$

En effet, les deux équations $f(x, y, z) = 0$, $\varphi(x, y, z) = 0$ représentent, dans un système de coordonnées trilinéaires ayant pour triangle de référence un triangle

ABC, $BC = x = 0$, $CA = y = 0$, $AB = z = 0$, deux courbes planes; éliminons x entre ces deux équations; leur résultant sera

$$\mathfrak{R}(y, z) = A_0 y^{mn} + A_1 y^{m(n-1)} z + \dots + A_{mn} z^{mn},$$

égalé à zéro; il représentera l'ensemble des droites joignant le point A, aux points communs aux deux courbes considérées; si $A_0 = 0$, les deux courbes ont un point commun sur $AB = z = 0$; il en résulte que les deux équations $f(x, y, 0) = 0$, $\varphi(x, y, 0) = 0$ qui représentent respectivement les droites joignant le point C aux points d'intersection de $f = 0$, $\varphi = 0$ avec $z = 0$ auront une racine commune, par suite $A_0 = K R_{z=0}(f, \varphi)$; les propriétés classiques (degré et poids) des résultants montrent d'ailleurs que $K = 1$. Nous aurons de même $A_{mn} = R_{y=0}(f, \varphi)$; or, dans le système cartésien primitivement considéré, le résultant $\mathfrak{R}(y, z) = 0$, où l'on fait $z = 1$, n'est autre que l'équation aux y des points d'intersection de $f = 0$, et de $\varphi = 0$; par suite

$$y_1 y_2 \dots y_{mn} = (-1)^{mn} \frac{R_{y=0}(f, \varphi)}{R_{z=0}(f, \varphi)}.$$

Nous en arrivons maintenant aux propositions à démontrer.

THÉORÈME I. — *Soient une parabole touchant deux droites rectangulaires Ox et Oy en A et B, et une courbe algébrique plane de classe n , les tangentes communes à ces deux courbes rencontrent les axes en*

$$A_1 A_2 \dots A_{2n}, \quad B_1 B_2 \dots B_{2n};$$

le produit

$$\frac{\overline{OA}^n \cdot \overline{OB}^n}{\overline{OA_1 OA_2 \dots OA_{2n}} \overline{OB_1 OB_2 \dots OB_{2n}}}$$

est égal au carré de la puissance de la droite de l'infini par rapport à la courbe considérée.

Soient en effet

$$F(\lambda, \mu) = \Phi_m(\lambda, \mu) + \Phi_{m-1}(\lambda, \mu) + \dots + \Phi_0 = 0$$

et

$$\alpha\beta\lambda\mu + \alpha\lambda + \beta\mu = 0$$

la courbe et la parabole considérée; si A_0 et A_m sont les coefficients de λ^m et μ^m dans $\Phi_m(\lambda, \mu)$, nous avons, d'après la proposition précédente,

$$\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{2m} \mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2m} = \frac{\Phi_0^2}{A_0 A_m \alpha^n \beta^n}.$$

Le théorème est démontré.

Si nous remarquons maintenant que la transformation corrélatrice définie plus haut fait correspondre à la parabole considérée un cercle passant par l'origine et ayant pour rayon $\left(\frac{i}{\alpha\beta}\right)^{\frac{1}{2}}$, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME I DE LAGUERRE. — *Si par un point M pris dans le plan d'une courbe algébrique plane, on mène un cercle quelconque, le produit des distances de ce point aux 2n points d'intersections du cercle et de la courbe est égal à la puissance du point M par rapport à la courbe multiplié par la n^{ième} puissance du rayon.*

THÉORÈME II. — *Le produit des coefficients angulaires des tangentes communes à une hyperbole équilatère ayant pour asymptotes les axes de coordonnées Ox et Oy et à une courbe algébrique plane quelconque est égal au carré du produit des coefficients angulaires des tangentes menées du point O à la courbe.*

Soient

$$(1) \quad K^2 uv - \omega^2 = 0,$$

$$(2) \quad f(u, v, \omega) = \varphi_m(u, v) + \omega \varphi_{m-1}(u, v) + \dots + \omega^m = 0$$

les équations tangentielles de l'hyperbole et de la courbe considérée ; posons

$$\varphi_m(u, v) = A_0 u^m + A_1 u^{m-1} v + \dots + A_m v^m,$$

l'élimination de ω entre les équations (1) et (2) nous donnera, en posant $-\frac{u}{v} = \mu$, l'équation aux coefficients angulaires des tangentes communes, équation qui sera de la forme

$$A_0^2 \mu^{2m} + \alpha_1 \mu^{2m-1} + \dots + \alpha_k \mu + A_m^2,$$

d'où

$$\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2m} = \left(\frac{A_m}{A_0} \right)^2,$$

les coefficients angulaires $\mu'_1, \mu'_2, \dots, \mu'_m$ des tangentes à la courbe issues de l'origine étant racines de l'équation

$$A_0 \mu^m - A_1 \mu^{m-1} + \dots + (-1)^m A_m = 0,$$

on a

$$(2) \quad |\mu'_1 \mu'_2 \dots \mu'_m|^2 = \mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2m} = \left(\frac{A_m}{A_0} \right)^2,$$

et le théorème est démontré.

Or le rapport $\frac{\mu}{M}$ des coefficients angulaires de deux droites, qui n'est autre que le rapport anharmonique de la division déterminée sur la droite de l'infini par les axes de coordonnées et ces deux droites, est tel que si V est l'angle des deux droites correspondant dans la transformation aux points à l'infini des deux droites primitives, on a $\frac{\mu}{M} = e^{2iV}$.

Si nous remarquons maintenant qu'à l'hyperbole

équilatère correspond un cercle de centre O, qu'aux points de contact des tangentes à la courbe primitive correspondent les asymptotes de la transformée, la relation (α) qui peut s'écrire

$$\left| \frac{\mu'_1 \mu'_2 \dots \mu'_m}{M^m} \right|^2 = \frac{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2m}}{M^{2m}}$$

nous conduit à énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME II DE LAGUERRE. — *Si un cercle est tracé dans le plan d'une courbe plane, la demi-somme des angles que font avec une direction arbitraire les $2n$ rayons du cercle aboutissant aux points d'intersection est égale à un multiple de Π près à la somme des angles que font les n asymptotes avec cette même direction.*

THÉORÈME III. — *Si M_1, M_2, \dots, M_m désignent les m^2 points d'une courbe algébrique plane, tels que la tangente au point M_i rencontrant les axes Ox et Oy en A_i et B_i , on ait $\frac{A_i B_i}{A_i M_i} = n$, on a, en désignant par $a_1 a_2 \dots a_m, b_1 b_2 \dots b_m$ les points de rencontre de la courbe avec Ox et Oy , par Π_0 la puissance tangentielle de la droite de l'infini par rapport à la courbe, la relation*

$$\frac{O a_1 O a_2 \dots O a_m O b_1 O b_2 \dots O b_m}{O A_1 O A_2 \dots O A_m O B_1 O B_2 \dots O B_m} = \left(\frac{n-1}{n^2} \right)^{m(m-1)} \Pi_0^2.$$

Les points M_i sont en effet à l'intersection de la courbe donnée

$$f(x, y, z) = \Phi_m(x, y) + z \Phi_{m-1}(x, y) + \dots + z^m \Phi_0 = 0$$

avec la courbe

$$\varphi(x, y, z) = y(n-1)f'_y - x f'_x = 0.$$

Si $x_i y_i$ sont les coordonnées de M_i ,

$$OA_i OB_i = \frac{n^2}{n-1} x_i y_i.$$

Or nous savons que

$$x_1 x_2 \dots x_m y_1 y_2 \dots y_m = \frac{R_{x=0}(f, \varphi) R_{y=0}(f, \varphi)}{R_{z=0}^2(f, \varphi)}.$$

$R_{z=0}(f, \varphi)$ est le résultant des deux équations

$$\Phi_m(x, y) = 0, \quad y(n-1)\Phi'_m y - x\Phi'_m x = 0,$$

ou, ce qui revient au même, des deux équations

$$\Phi_m(x, y) = 0, \quad ny\Phi'_m y = 0;$$

si donc $\Phi_m(x, y) = \alpha_0 x^m + \alpha_1 x^{m-1} y + \dots + \alpha_m y^m$,

$$R_{z=0}(f, \varphi) = n^m \alpha_0 \alpha_m \Delta xy,$$

Δxy étant le discriminant de la forme $\Phi_m(x, y) = 0$; nous aurons de même, en désignant par Δxz , Δyz les discriminants des formes $f(x, 0, z) = 0$, $f(0, y, z) = 0$,

$$R_{y=0}(f, \varphi) = \alpha_0 \Phi_0 \Delta xz, \quad R_{x=0}(f, \varphi) = \alpha_m \Phi_0 \Delta yz (n-1)^m;$$

d'où

$$x_1 x_2 \dots x_m y_1 y_2 \dots y_m = \frac{\Phi_0^2}{\alpha_0 \alpha_m} \frac{\Delta xz \Delta yz}{\Delta^2 xy} \left(\frac{n-1}{n^2} \right)^m,$$

d'où, si l'on remarque que Δxy , Δxz , Δyz sont les coefficients des puissances de v^m , v^m , u^m dans l'équation tangentielle de la courbe $f(x, y) = 0$, on a la relation cherchée

$$\frac{Oa_1 \dots Oa_m Ob_1 \dots Ob_m}{OA_1 \dots OA_m OB_1 \dots OB_m} = \left(\frac{n-1}{n^2} \right)^{m(m-1)} \Pi_0^2.$$

Il suffit maintenant de remarquer que, dans notre transformation, à la tangente $A_i B_i$ correspond un point P_i , tel que la droite OP_i coupe la tangente à la courbe trans-

formée en P_i sous un angle V , tel que $e^{2V} = -\frac{1}{n-1}$, d'où l'on déduit $\frac{n^2}{n-1} = (2 \sin V)^2$, que de plus à la droite $a_i b_i$ joignant deux points d'intersection de la courbe primitive avec les axes correspond un foyer réel de la transformée, pour pouvoir énoncer les théorèmes suivants :

THÉORÈME III DE LAGUERRE. — *Si par un point O, pris dans le plan d'une courbe algébrique plane de degré n, on mène les $\mu + n$ droites qui la coupent sous un angle donné V, le produit de toutes les longueurs comprises entre le point O et les pieds de ces droites est égal au produit des distances du point O aux μ foyers réels de la courbe, multiplié par la puissance du point O, le tout divisé par $(2 \sin V)^n$.*

THÉORÈME IV DE LAGUERRE. — *Si par un point O, pris dans le plan d'une courbe algébrique plane de degré n, on mène les $\mu + n$ normales à la courbe, le produit des longueurs comprises entre le point O et les pieds des normales est égal au produit des distances du point O aux μ foyers réels, multiplié par la puissance du point O, le tout divisé par 2^n .*

THÉORÈME IV. — *Si les asymptotes d'une courbe algébrique plane de degré m coupent les axes Ox et Oy en $A_1, A_2, \dots, A_m, B_1, B_2, \dots, B_m$; si*

$$x_1 y_1, \quad x_2 y_2, \quad \dots, \quad x_{m,m-1} y_{m(m-1)}$$

sont les coordonnées des points de contact de la courbe avec les tangentes issues du point O; si la courbe coupe Ox et Oy en $a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_m$ on a, en désignant par Π_0^2 le carré de la puissance tangentielle de la droite de l'infini par rapport à la

courbe,

$$\frac{O a_1 \dots O a_m O b_1 \dots O b_m}{O A_1 O A_2 \dots O A_m O B_1 O B_2 \dots O B_m} \\ = \Pi_0^2 x_1 x_2 \dots x_{m(m-1)} y_1 y_2 \dots y_{m(m-1)}.$$

En effet, les points de contact des tangentes à la courbe

$$f(x, y, z) = \Phi_m(x, y) + z \Phi_{m-1}(x, y) + \dots + z^m \Phi_0 = 0,$$

issues de l'origine, sont à l'intersection de cette courbe avec la première polaire de l'origine

$$\varphi(x, y, z) = f'_z = \Phi_{m-1}(x, y) + 2z \Phi_{m-2}(x, y) + \dots + m \Phi_0 z^{m-1};$$

posons

$$\Phi_m(x, y) = \alpha_0 x^m + \alpha_1 x^{m-1} y + \dots + \alpha_m y^m,$$

nous avons

$$x_1 x_2 \dots x_{m(m-1)} y_1 y_2 \dots y_{m(m-1)} = \frac{R_{x=0}(f, \varphi), R_{y=0}(f, \varphi)}{R_{z=0}^2(f, \varphi)}, \\ R_{z=0}(f, \varphi) = \mathfrak{R}(\Phi_m, \Phi_{m-1}).$$

$\mathfrak{R}(\Phi_m, \Phi_{m-1})$ étant le résultat de $\Phi_m = 0, \Phi_{m-1} = 0$.
 $R_{x=0}(f, \varphi)$ est le résultant de $f(0, y, z) = 0$ et de $f'_z(0, y, z) = 0$; par suite

$$R_{x=0}(f, \varphi) = \Phi_0 \Delta y z,$$

$\Delta y z$ étant le discriminant de la forme $f(0, y, z) = 0$;
 de même

$$R_{y=0}(f, \varphi) = \Phi_0 \Delta x z,$$

$\Delta x z$ étant le discriminant de la forme $f(x, 0, z) = 0$,
 d'où

$$x_1 x_2 \dots x_{m(m-1)} y_1 y_2 \dots y_{m(m-1)} = \frac{\Phi_0^2 \Delta x z \Delta y z}{\mathfrak{R}^2(\Phi_m, \Phi_{m-1})}.$$

L'équation aux coefficients angulaires des asymptotes de $f(x, y, z) = 0$ est $\Phi_m(1, \mu)$ et l'asymptote correspondant à la racine μ_1 de cette équation est

$y = \mu_1 x - \frac{\Phi_{m-1}(1, \mu_1)}{\Phi'_m \mu(1, \mu_1)}$; nous avons par suite

$$\begin{aligned} & \text{OA}_1 \text{OA}_2 \dots \text{OA}_m \text{OB}_1 \text{OB}_2 \dots \text{OB}_m \\ &= \frac{(-1)^m}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_m} \left[\frac{\Phi_{m-1}(1, \mu_1) \dots \Phi_{m-1}(1, \mu_m)}{\Phi'_m \mu(1, \mu_1) \dots \Phi'_m \mu(1, \mu_m)} \right]^2; \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} \Phi_{m-1}(1, \mu_1) \dots \Phi_{m-1}(1, \mu_m) &= \mathfrak{R}(\Phi_m, \Phi_{m-1}), \\ \Phi'_m \mu(1, \mu_1) \dots \Phi'_m \mu(1, \mu_m) &= \alpha_m \Delta x y, \end{aligned}$$

Δxy étant le discriminant de la forme $\Phi_m(x, y)$, d'où

$$\text{OA}_1 \dots \text{OA}_m \text{OB}_1 \dots \text{OB}_m = \frac{\mathfrak{R}^2(\Phi_m, \Phi_{m-1})}{x_0 x_m \Delta^2 xy},$$

d'où enfin

$$\frac{\text{O} a_1 \dots \text{O} a_m \text{O} b_1 \dots \text{O} b_m}{\text{O} A_1 \dots \text{O} B_m \text{O} B_1 \dots \text{O} B_m} = x_1 \dots x_{m(m-1)} y_1 \dots y_{m(m-1)} \Pi_0^2.$$

Cette formule, soumise à la transformation corrélatrice indiquée, nous conduit au théorème suivant :

THÉORÈME V DE LAGUERRE. — *Si par un point O pris dans le plan d'une courbe algébrique plane de degré n, on mène des tangentes à cette courbe, le produit des longueurs comprises sur les tangentes entre le point O et les points de contact est égal au produit des distances du point O aux μ foyers réels, multiplié par la puissance du point O, le tout divisé par 2^n et par le produit des distances de ce point aux asymptotes.*

De nos théorèmes III et IV nous déduirons le suivant :

THÉORÈME V. — *Si M_1, \dots, M_m sont les m^2 points d'une courbe algébrique plane, tels que la tangente au point M_i rencontrant les axes Ox et Oy en A_i et B_i , M_i soit le milieu du segment $A_i B_i$, si les*

asymptotes de la courbe rencontrent les axes en $a_0, \dots, a_m, b_0, \dots, b_m$, si enfin $x_1, y_1, \dots, x_{m(m-1)}, y_{m(m-1)}$ sont les coordonnées des points de contact de la courbe avec les tangentes issues de O, on a

$$OA_1 \dots OA_m \cdot OB_1 \dots OB_m \cdot \\ = 2^{2m(m-1)} Oa_0 a_1 \dots Oa_m \cdot Ob_0 b_1 \dots Ob_m \cdot x_1 \dots x_{m(m-1)} y_1 \dots y_{m(m-1)}.$$

De ce théorème se déduit immédiatement le suivant :

THÉORÈME VI DE LAGUERRE. — Si par un point O pris dans le plan d'une courbe algébrique plane, on mène des tangentes et des normales à la courbe, le produit des longueurs comprises sur les tangentes entre le point O et les points de contact, multiplié par le produit des distances de ce point aux asymptotes, est égal au produit des longueurs comprises entre le point O et les pieds des normales.

THÉORÈME VI. — Si M_1, M_2, \dots, M_m sont les m^2 points d'une courbe algébrique plane de degré m , tels que la tangente à la courbe au point M_i coupant les axes Ox et Oy en A_i et B_i , on ait $\frac{A_i B_i}{A_i M_i} = n$; si l'on désigne par $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ les coefficients angulaires des droites OM_i , par $\mu'_1, \mu'_2, \dots, \mu'_m$ les coefficients angulaires des droites $a_i b_i$ joignant les points d'intersection de la courbe avec les axes; par $\mu''_1, \mu''_2, \dots, \mu''_{m(m-1)}$ les coefficients angulaires des tangentes à la courbe issues de O, on a la relation

$$\frac{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_m}{\mu''_1 \mu''_2 \dots \mu''_{m(m-1)}} = \left(\frac{-1}{n-1} \right)^m \mu'_1 \mu'_2 \dots \mu'_m,$$

.....

En effet, en employant les notations du théorème III,

$$\mu_1 \mu_2 \dots \mu_m = \frac{R_{y=0}(f, \varphi)}{R_{x=0}(f, \varphi)} = \frac{\alpha_0}{\alpha_m} \frac{\Delta x z}{\Delta y z} \frac{1}{(n-1)^m};$$

ou

$$\frac{\alpha_0}{\alpha_m} = (-1)^m \mu'_1 \mu'_2 \dots \mu'_m, \quad \frac{\Delta x z}{\Delta y z} = \mu''_1 \mu''_2 \dots \mu''_m (m-1),$$

d'où la formule à démontrer.

Le raisonnement qui nous a servi à obtenir le théorème II de Laguerre transformera cette formule en le théorème suivant :

THÉORÈME VII DE LAGUERRE. — *Par un point O pris dans le plan d'une courbe plane algébrique de degré n, menons les $\mu + n$ droites qui la coupent sous un angle donné V. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\mu+n}$ les angles que font ces droites avec un axe fixe arbitraire; soient f_1, f_2, \dots, f_μ les angles que font avec le même axe les droites joignant le point O aux μ foyers réels et $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ les angles de cet axe avec les asymptotes de la courbe. Tous ces angles sont liés entre eux par la relation suivante, qui doit être vérifiée à un multiple près de Π :*

$$\Sigma \lambda^* - \Sigma \zeta = \Sigma f + nV.$$

THÉORÈME VII. — *Si une courbe algébrique plane coupe les axes Ox et Oy en $a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_m$, le produit des coefficients angulaires des droites $a_i b_i$ est égal au produit des coefficients angulaires des asymptotes de la courbe.*

Soient

$$f(x, y, z) = \Phi_m(x, y) + z\Phi_{m-1}(x, y) + \dots + z^m\Phi_0,$$

$$\Phi_m(x, y) = \alpha_0 x^m + \alpha_1 x^{m-1}y + \dots + \alpha_m y^m;$$

le produit des coefficients angulaires des droites $a_i b_i$ est égal à $(-1)^m \frac{\alpha_0}{\alpha_m}$; le produit des coefficients angulaires des asymptotes est de même $(-1)^m \frac{\alpha_0}{\alpha_m}$; théorème qui nous conduit immédiatement au suivant :

THÉORÈME VIII DE LAGUERRE. — *Si par un point O, pris dans le plan d'une courbe plane algébrique, on mène des tangentes à la courbe, la somme des angles que font ces tangentes avec une direction fixe arbitraire est égale à la somme des angles que font avec cette même direction les droites joignant le point O aux foyers réels de la courbe.*

Remarque. — Nous avons supposé dans toute cette étude que la courbe étudiée n'avait point de singularité et n'était ni circulaire ni tangente à la droite de l'infini; il serait facile de voir, en employant les mêmes méthodes que ci-dessus, comment dans ces hypothèses se modifient les théorèmes indiqués.
