NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

F. BALITRAND

Sur la condition pour que les tangentes aux pieds des normales issues d'un point à une ellipse touchent un cercle

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 18 (1918), p. 390-392

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__390_1>

[$L^1 5b$]

SUR LA CONDITION POUR QUE LES TANGENTES AUX PIEDS DES NORMALES ISSUES D'UN POINT A UNE ELLIPSE TOUCHENT UN CERCLE;

PAR M. F. BALITRAND.

Étant donnée l'ellipse qui a pour équation tangentielle

$$a^2 u^2 + b^2 v^2 - 1 = 0,$$

ainsi qu'un point $P(\alpha, \beta)$ de son plan, on peut se proposer de chercher à quelle condition les tangentes aux pieds des normales à l'ellipse issues de P enveloppent un cercle.

On sait que ces tangentes touchent une parabole, dite « parabole de Chasles », ayant pour équation tangentielle

$$c^2 uv - \beta u + \alpha v = 0.$$

L'ellipse et la parabole déterminent un faisceau tangentiel représenté par

$$\lambda(a^2 u^2 + b^2 v^2 - 1) + c^2 uv - \beta u + \alpha v = 0.$$

Pour qu'il renferme le cercle

$$R^2(u^2+v^2)-(ux_0+vy_0+1)^2=0,$$

de centre (x_0, y_0) et de rayon R, il faut et il suffit qu'on ait

$$\frac{\lambda a^2}{R^2-x_0^2}=\frac{\lambda b^2}{R^2-y_0^2}=\frac{\lambda}{1}=\frac{c^2}{-2x_0y_0}=\frac{\beta}{2x_0}=\frac{\alpha}{-y_0};$$

d'où, en éliminant λ,

$$R^2-x_0^2=a^2,\qquad R^2-y_0^2=b^2,\qquad x_0=\frac{c^2}{\alpha},\qquad y_0=-\frac{c^2}{\beta}.$$

On déduit de là les deux équations

$$x_0^2-y_0^2+c^2=0,\qquad \frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{c^2}=0.$$

La première représente l'hyperbole équilatère qui a pour sommets réels les foyers imaginaires de l'ellipse donnée et la seconde la kreuzcurve hyperbolique correspondante; et l'on peut observer que ces deux courbes ne changent pas quand on remplace l'ellipse donnée par une ellipse homofocale.

Les points de contact de la parabole de Chasles avec les axes ont pour équations

$$c^2u+\alpha=0,\qquad c^2v-\beta=0;$$

ce sont donc les projections du centre C du cercle sur les axes. Quant aux relations

$$R^2-x_0^2=a^2,\qquad R^2-y_0^2=b^2,$$

elles sont faciles à interpréter géométriquement. Elles prouvent que les cercles tels que C détachent sur les axes de l'ellipse, quel que soit le point P, des segments égaux aux axes $2b$ et $2a$ de cette ellipse.

En résumé on a les propositions suivantes :

1° *Le lieu des points* P *tel que les tangentes aux pieds des normales à l'ellipse, issues de ces points, enveloppent un cercle est la kreuzcurve hyperbolique correspondant à l'hyperbole équilatère*

$$x^2 - y^2 + c^2 = 0.$$

2° *Lorsque le point* P *décrit la kreuzcurve, le lieu des centres des cercles correspondants est l'hyperbole équilatère ci-dessus.*

3° *Tous ces cercles détachent sur les axes des segments égaux aux axes* $2b$ *et* $2a$ *de l'ellipse.*

4° *L'ellipse donnée et un cercle déterminent un faisceau tangentiel de coniques qui renferme une et une seule parabole. On l'obtient en projetant le centre du cercle sur les axes et construisant la parabole qui leur est tangente en ces points.*

5° *Le point* P *restant fixe, tous les cercles qu'on obtient en remplaçant l'ellipse donnée par une ellipse homofocale quelconque sont concentriques.*