Nouvelles annales de mathématiques

G. Fontené

Sur les cercles de Pappus : formule de Pappus, formule de Schubert généralisée

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 18 (1918), p. 383-390

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__383_1>

[F8fβ]

SUR LES CERCLES DE PAPPUS : FORMULE DE PAPPUS, FORMULE DE SCHUBERT GÉNÉRALISÉE;

PAR M. G. FONTENÉ.

1. *Préliminaires.* — Étant donnés deux cercles *quelconques* (O) et (O′), dont nous supposerons, par exemple, que l'un est intérieur à l'autre, si l'on considère une suite de cercles (ω) tangents à chacun des cercles donnés et tels que deux cercles consécutifs sont tangents entre eux, il existe entre deux cercles consécutifs de cette série une relation doublement quadratique. Si ρ est le rayon de l'un de ces cercles, y l'ordonnée du centre relative à la droite OO′, la relation entre ρ et y est de la forme

$$y^2 = a\rho^2 + b\rho + c,$$

comme on le voit, en observant que le lieu du point ω est une conique de foyers O et O′; on détermine les constantes en faisant $y = 0$, puis $\rho = 0$. Si l'on pose

$$p, q = \frac{1}{2}(r - r' \pm d) \qquad (r > r'),$$

on trouve

$$y^2 = -\frac{(r+r')^2 - d^2}{d^2}(\rho - p)(\rho - q);$$

on peut écrire, en introduisant $\frac{y}{\rho}$ et $\frac{1}{\rho}$,

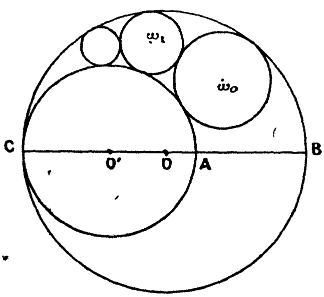
$$\frac{\left[\frac{(r-r')^2-d^2}{\rho}-2(r-r')\right]^2}{4d^2}+\frac{(r-r')^2-d^2}{(r+r')^2-d^2}\,\frac{y^2}{\rho^2}=1.$$

Le système des cercles (ω) peut se fermer avec p cercles, sous une condition entre d, R, R'.

2. *Cercles de Pappus. — Lorsque les deux cercles* (O) *et* (O') *sont quelconques, les quantités* ρ_n *et* y_n *relatives au cercle* (ω_n) *ne s'expriment pas en fonction algébrique de* n; *mais cela se produit lorsque les deux cercles* (O) *et* (O') *sont tangents : on a alors les cercles de Pappus, qui offrent ainsi un cas de dégénérescence des formules.*

Théorème. — *Considérons* (*fig.* 1) *deux cercles* (O) *et* (O'), *tangents intérieurement au point* C, *et une*

Fig. 1.



suite de cercles ..., (ω_{-2}), (ω_{-1}), (ω_0), (ω_1), (ω_2), ..., *dont chacun touche les deux cercles* (O) *et* (O'), *dont chacun est, en outre, tangent au précédent; le sens des indices croissants étant celui de la figure,* *le rayon ρ_n du cercle d'indice n, et l'ordonnée y_n de son centre par rapport à la droite* CB, *comptée positivement au-dessus de* CB, *sont donnés par les formules*

$$(1)\qquad \frac{y_n}{2\rho_n} - \frac{y_0}{2\rho_0} = n,$$

$$(2)\qquad \frac{1}{\rho_n} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{d}{rr'}\,n\left(\frac{y_0}{\rho_0} + n\right);$$

cette dernière formule est de la forme

$$\frac{1}{\rho_n} = \mathrm{A} + \mathrm{B}n + \mathrm{C}n^2.$$

3. *La formule* (1). — En inversant la figure par rapport au pôle C, on transforme les cercles (O) et (O′) en deux droites, qui sont par exemple les tangentes en B et en A aux cercles donnés; on a alors, les cercles transformés (ω') étant égaux, et les indices croissant comme il a été dit,

$$y'_n - y'_{n-1} = 2\rho'$$

ou

$$\frac{y'_n}{2\rho'} - \frac{y'_{n-1}}{2\rho'} = 1;$$

comme le rapport $\frac{y}{\rho}$ se conserve par homothétie, on a aussi

$$(\alpha)\qquad \frac{y_n}{2\rho_n} - \frac{y_{n-1}}{2\rho_{n-1}} = 1;$$

on en déduit la formule (1). Pappus (*Collections mathématiques*, Livre IV, th. XV) donne la relation (α) sous la forme

$$\frac{y_n}{2\rho_n} = \frac{y_{n-1} + 2\rho_{n-1}}{2\rho_{n-1}};$$

il n'écrit pas la formule générale (1). Mais il en donne deux cas particuliers : d'une part, le cas où le cercle (ω_0)

est décrit sur AB comme diamètre, et l'on a alors

$$(1') \qquad y_n = 2\rho_n \times n;$$

d'autre part, le cas où le cercle (ω_0) est tangent à la droite AB, et l'on a alors

$$(1'') \qquad y_n = 2\rho_n \times \left(n + \frac{1}{2}\right).$$

La relation (α) peut être regardée comme résultant de la décomposition d'une relation doublement quadratique

$$\left(\frac{y'}{2\rho'} - \frac{y}{2\rho}\right)^2 = 1.$$

4. *La formule* (2). — Le lieu des points ω, avec

$$\omega O + \omega O' = r + r',$$

est une ellipse de foyers O et O', passant en C, et l'on a

$$2a = r + r', \qquad 2c = d = r - r', \qquad b^2 = rr'.$$

Si on la rapporte à ses axes, et si l'on observe que ρ s'exprime linéairement en fonction du rayon vecteur $O'\omega$, par suite en fonction de l'abscisse x du centre ω, que, d'ailleurs, y est nul pour $\rho = 0$ ou $\rho = d$, on peut écrire sans calcul

$$y^2 = \frac{4rr'}{d^2}\rho(d-\rho) \qquad \left[\frac{4rr'}{d^2} = \frac{b^2}{a^2} : \frac{c^2}{a^2}\right],$$

$$\frac{y^2}{4\rho^2} = \frac{rr'}{d}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{d}\right),$$

ou, avec l'indice n,

$$(\beta) \qquad \frac{1}{\rho_n} = \frac{1}{d} + \frac{d}{rr'}\left(\frac{y_n}{2\rho_n}\right)^2;$$

en retranchant de cette formule la formule analogue pour l'indice o, et en tenant compte de la formule (1), on obtient la formule (2). Les constantes y_0 et ρ_0 des formules (1) et (2) sont liées par la relation (β); on peut se donner $\frac{y_0}{2\rho_0}$ et calculer ρ_0.

Dans les *Nova Acta* de l'Académie de Saint-Pétersbourg, t. X, 1793, p. 74, un géomètre, nommé F.-T. Schubert, en vue de démontrer les formules (1') et (1'') de Pappus, a obtenu, *de proche en proche*, le résultat auquel conduit la formule (β) dans les deux cas particuliers auxquels correspondent ces formules (1') et (1'') :

$$\frac{1}{\rho_n} = \frac{1}{d} + \frac{d}{rr'} n^2, \tag{2'}$$

$$\frac{1}{\rho_n} = \frac{1}{d} + \frac{d}{rr'} \left(n + \frac{1}{2}\right)^2; \tag{2''}$$

il donne seulement ces formules résolues par rapport à ρ_n au lieu de $\frac{1}{\rho_n}$.

5. *Cas où les cercles* (O) *et* (O') *sont tangents extérieurement.* — Il faut alors, au second membre de la formule (β), remplacer $\frac{1}{d}$ par $-\frac{1}{d}$, ce qui ne modifie d'ailleurs pas la formule (2) :

$$\frac{1}{\rho_n} = -\frac{1}{d} + \frac{d}{rr'} \left(\frac{y_n}{2\rho_n}\right)^2. \tag*{[β]}$$

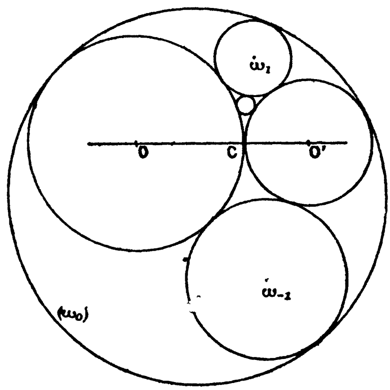
Parmi les cercles (ω), il en existe ici un et un seul qui enveloppe les cercles (O) et (O'); le rayon de ce cercle doit être considéré comme négatif dans les formules. Si, comme dans la figure 2, ce cercle est le cercle (ω_0), il faut faire $\rho_0 < 0$; c'est ainsi que, pour $y_0 = 0$, la formule [β] donne $\rho_0 = -d$.

6. *Formule pour un cas particulier.* — Les deux cercles (O) et (O′) étant tangents extérieurement (*fig.* 2), *si l'on prend comme cercle* (ω_0) *la conique formée d'une tangente commune extérieure et de la droite à l'infini,* ρ_0 et y_0 sont infinis, avec

$$\frac{y_0}{2\rho_0} = \frac{+\sqrt{rr'}}{d},$$

la tangente commune extérieure étant celle dont les

Fig. 2.



points de contact avec les cercles (O) et O′) sont au-dessus de OO′; on a ainsi

$$\frac{y_n}{2\rho_n} = \frac{\sqrt{rr'}}{d} + n, \qquad \frac{1}{\rho_n} = \frac{d}{rr'} n \left(\frac{2\sqrt{rr'}}{d} + n \right);$$

pour $n = 1$ et $n = -1$, on a bien

$$\frac{1}{\sqrt{\rho_1}} = \frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{r'}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{\rho_{-1}}} = \left| \frac{1}{\sqrt{r}} - \frac{1}{\sqrt{r'}} \right|.$$

La distance z *du centre* ω *à la tangente commune* *est donnée par la formule*

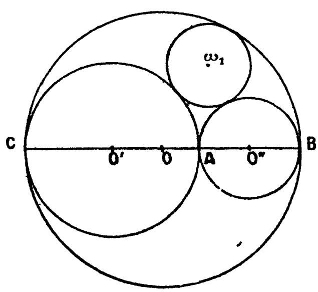
$$(3) \qquad \frac{z_n}{\rho_n} = 2n^2 - 1 \qquad \text{ou} \qquad \frac{z_n + \rho_n}{2\rho_n} = n^2,$$

qu'on peut établir sous la seconde forme en inversant la figure par rapport au point de contact de la tangente commune avec l'un des cercles (O), (O'); quand on change n en $-n$, la valeur du rapport ne change pas. Pour $n=2$, le cercle ω_2 est tangent à trois cercles (O), (O'), (ω_1), tangents entre eux deux à deux et qui ont une tangente commune extérieure; on a alors

$$\frac{z}{\rho} = 7.$$

7. *La figure* 3. — Le cercle (ω_1) de la figure 3 est tangent à trois cercles (O), (O'), (O''), tangents deux à deux, et qui ont leurs centres en ligne droite. On a alors, en considérant par exemple cette figure comme

Fig. 3.



un cas particulier de la figure 2, et en appliquant la formule [β],

$$y_1 = 2\rho_1,$$

$$\frac{1}{\rho_1} = -\frac{1}{r} + \frac{r}{r'r''} = \frac{r^2 + r'^2 + r''^2}{2rr'r''}.$$

J'ai donné, dans la *Revue de l'Enseignement des Sciences*, 11ᵉ année, p. 68, une démonstration par le calcul de la formule $y_1 = 2\rho_1$.

Chacun des trois triangles curvilignes situés au-dessus de CB donne lieu à une série de cercles (ω); pour trois de ces cercles qui ont même indice, l'axe de similitude directe est la droite CB.