MATHIEU WEILL

Propriété des coniques et des quadriques à centres

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 18 (1918), p. 373-383

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__373_0>

[L¹16][L²14]

PROPRIÉTÉ DES CONIQUES ET DES QUADRIQUES A CENTRES;

Par M. Mathieu WEILL.

I. Cherchons l'enveloppe d'une droite, définie par la condition que la somme des carrés des distances de n points donnés du plan, à cette droite, soit égale à une constante K^2.

Prenons comme axes des coordonnées les axes principaux d'inertie du système des n points; nous aurons

$$\Sigma x_1 = 0, \qquad \Sigma y_1 = 0, \qquad \Sigma x_1 y_1 = 0.$$

Si la droite mobile a pour équation

$$x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0,$$

on aura

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta - 1 = 0,$$
$$A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + np^2 - K^2 = 0,$$

en posant

$$\Sigma x_1^2 = A, \qquad \Sigma y_1^2 = B.$$

Prenons le déterminant fonctionnel, et égalons-le à zéro; nous aurons la relation

$$\begin{vmatrix} x & y & -1 \\ \cos\alpha & \cos\beta & 0 \\ A\cos\alpha & B\cos\beta & np \end{vmatrix} = 0.$$

Joignons à cette relation

$$x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0$$

et éliminons x; il vient

$$y = \cos\beta \, \frac{K^2 - B}{np},$$

ou

$$\frac{y}{\frac{K^2 - B}{n}} = \frac{\cos\beta}{p};$$

de même on trouve

$$\frac{x}{\frac{K^2 - A}{n}} = \frac{\cos\alpha}{p},$$

d'où l'équation de l'enveloppe

$$\frac{x^2}{\frac{K^2 - A}{n}} + \frac{y^2}{\frac{K^2 - B}{n}} = 1.$$

Quant au point de contact de la droite avec son enveloppe, on l'obtient en projetant sur la droite le centre des distances proportionnelles des points donnés, affectés de coefficients égaux à leurs distances respectives à la droite (*voir* ma Note sur une propriété de certaines courbes et surfaces enveloppes).

Etudions le cas où la courbe est une ellipse : le cas de l'hyperbole donnerait des résultats analogues.

Supposons, d'abord, $n = 2$, et donnons-nous une ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

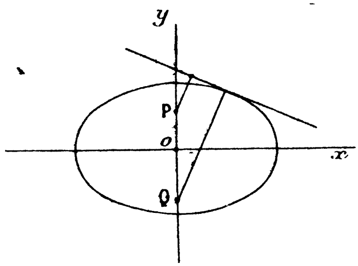
On trouve facilement, en identifiant cette équation avec celle de l'enveloppe, qui est, ici,

$$\frac{x^2}{\frac{K^2 - A}{2}} + \frac{y^2}{\frac{K^2 - B}{2}} = 1,$$

qu'il existe, sur le petit axe, deux points fixes P et R, dont la distance au centre est $\sqrt{a^2 - b^2}$, et répondant au problème; d'où résulte le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Il existe, sur le petit axe d'une ellipse, et à une distance du centre égale à* C, *deux points* P *et* Q, *tels que la somme des carrés de leurs*

Fig. 1.



distances à une tangente quelconque à l'ellipse est constante et égale à $2a^2$.

Supposons $n = 3$; nous aurons

$$\frac{x^2}{\frac{K^2 - A}{3}} + \frac{y^2}{\frac{K^2 - B}{3}} = 1$$

et

$$A = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$
$$B = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$
$$y_1 + y_2 + y_3 = 0,$$
$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 0.$$

Éliminant x_2, y_2, x_3, y_3, il vient pour lieu du point $x_1 y_1$ et, par suite, des deux autres points, l'ellipse

$$(2) \qquad \frac{x^2}{\frac{2A}{3}} + \frac{y^2}{\frac{2B}{3}} = 1$$

avec

$$A = K^2 - 3a^2,$$
$$B = K^2 - 3b^2.$$

Les trois points forment un triangle semi-régulier inscrit dans l'ellipse (2); d'où résulte le théorème suivant :

Théorème.— *Étant données une ellipse*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

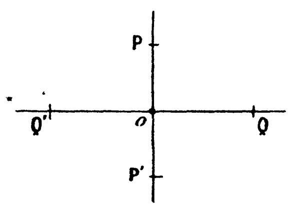
et une constante K², *il existe trois points fixes* P, Q, R, *tels que la somme des carrés des distances de ces trois points à une tangente quelconque à l'ellipse est égale à* K². *Ces trois points sont les sommets d'un triangle semi-régulier inscrit dans l'ellipse*

$$\frac{x^2}{\frac{2(K^2-3a^2)}{3}} + \frac{y^2}{\frac{2(K^2-3b^2)}{3}} = 1.$$

On peut remplacer P, Q, R, par trois autres points fixes P′, Q′, R′, quelconques, formant un triangle semi-régulier inscrit dans cette même ellipse.

Il est inutile de supposer n supérieur à 3, car on

Fig. 2.



sait qu'on peut remplacer la somme des carrés des distances de n points fixes à une droite quelconque, par la somme des carrés des distances de trois points fixes à cette droite, ces trois points étant les sommets d'un triangle semi-régulier inscrit dans une ellipse ayant pour axes les axes principaux d'inertie du système des n points; ces trois points peuvent, d'ailleurs, être remplacés par trois autres, ayant les mêmes propriétés.

Nous envisagerons, cependant, le cas de $n = 4$, en considérant quatre points P, Q, P′, Q′, situés sur les axes de l'ellipse donnée, et symétriques deux à deux par rapport au centre.

En posant

$$OQ = d, \qquad OP = d',$$

on trouve

$$d^2 + 2a^2 = d'^2 + 2b^2 = \frac{K^2}{2}.$$

Donc, si K^2 est donné, les points sont déterminés; on a donc le théorème suivant :

Théorème. — *Sur les axes d'une ellipse donnée, il existe quatre points fixes, symétriques par rapport au centre et tels que la somme des carrés de leurs distances à une tangente quelconque à l'ellipse est égale à une constante donnée.*

Il faut qu'on ait $K^2 > 4a^2$, pour que les points soient réels.

En particulier, si l'on a $K^2 = 4a^2$, les quatre points se réduisent à trois, dont le centre, qui compte pour deux, d'où un énoncé intéressant.

Il est facile de généraliser les résultats précédents. Cherchons l'enveloppe d'une droite telle que la somme des carrés des distances de n points fixes à cette droite, multipliés respectivement par des constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, soit égale à une constante K^2.

En prenant pour axes de coordonnées les axes principaux d'inertie du système des n points, affectés des coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, on aura

$$\begin{aligned}
\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n &= 0,\\
\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n &= 0,\\
\alpha_1 x_1 y_1 + \alpha_2 x_2 y_2 + \ldots\ldots\ldots &= 0.
\end{aligned}$$

En posant

$$\begin{aligned}
A &= \Sigma \alpha_1 x_1^2,\\
B &= \Sigma \alpha_1 y_1^2,\\
C &= \Sigma \alpha_1,
\end{aligned}$$

on trouve pour équation de l'enveloppe

$$\frac{x^2}{\dfrac{K^2 - A}{C}} + \frac{y^2}{\dfrac{K^2 - B}{C}} = 1.$$

Réciproquement, une conique à centre étant donnée, on peut envisager des points fixes attachés à cette ellipse et répondant au problème posé; d'où un grand nombre de propriétés nouvelles des coniques à centre. On a, par exemple, le résultat suivant : prenant, sur l'axe focal de l'ellipse, deux points conjugués harmoniques par rapport aux foyers, et K^2 étant une constante quelconque, on pourra toujours trouver deux valeurs α_1, α_2, telles qu'on ait

$$\alpha_1 \delta_1^2 + \alpha_2 \delta_2^2 = K^2,$$

δ_1 et δ_2 étant les distances des deux points fixes à une tangente quelconque à l'ellipse. Les valeurs α_1 et α_2 ne sont pas, nécessairement, positives toutes les deux.

II. Cherchons l'enveloppe d'un plan tel que la somme des carrés des distances de n points donnés à ce plan soit égale à une quantité donnée K^2.

En prenant pour axes de coordonnées les axes principaux d'inertie du système des n points, nous aurons

$$\Sigma x_1 = 0, \qquad \Sigma y_1 = 0, \qquad \Sigma z_1 = 0,$$
$$\Sigma x_1 y_1 = 0, \qquad \Sigma y_1 z_1 = 0, \qquad \Sigma z_1 x_1 = 0.$$

Posons

$$\Sigma x_1^2 = A, \qquad \Sigma y_1^2 = B, \qquad \Sigma z_1^2 = C,$$

le plan mobile ayant pour équation

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0;$$

on aura

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$
$$A \cos^2\alpha + B \cos^2\beta + C \cos^2\gamma + np^2 = K^2.$$

Nous en déduirons

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ A\cos\alpha & B\cos\beta & C\cos\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x & y & -1 \\ A\cos\alpha & B\cos\beta & np \\ \cos\alpha & \cos\beta & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on multiplie les colonnes du premier déterminant par $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, et si l'on ajoute ensuite les colonnes, on déduit

$$\begin{vmatrix} x & y & p \\ A\cos\alpha & B\cos\beta & K^2 - np^2 \\ \cos\alpha & \cos\beta & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

d'où

$$x = \frac{K^2 - A}{n} \frac{\cos\alpha}{p},$$
$$y = \frac{K^2 - B}{n} \frac{\cos\beta}{p},$$
$$z = \frac{K^2 - C}{n} \frac{\cos\gamma}{p}.$$

L'équation de l'enveloppe est donc

$$\frac{x^2}{\frac{K^2-A}{n}}+\frac{y^2}{\frac{K^2-B}{n}}+\frac{z^2}{\frac{K^2-C}{n}}-1=0;$$

c'est une quadrique à centre.

Réciproquement, considérons un ellipsoïde rapporté à ses axes et un plan tangent

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=\sqrt{a^2\cos^2\alpha+b^2\cos^2\beta+c^2\cos^2\gamma}.$$

Exprimons que la somme des carrés des distances de deux points fixes à un plan tangent quelconque est constante, nous aurons

$$\begin{aligned} x'+x''&=0, & x'y'+x''y''&=0,\\ y'+y''&=0, & x'z'+x''z''&=0,\\ z'+z''&=0, & y'z'+y''z''&=0. \end{aligned}$$

On en déduit que deux des quantités x', y', z' sont nulles; soit, par exemple,

$$x'=0,\qquad y'=0;$$

d'où

$$x''=0,\qquad y''=0,$$

$$a^2=b^2=z'^2+c^2=\frac{K^2}{2}.$$

Donc, l'ellipsoïde est de révolution autour du plus petit de ses axes, et sur l'axe de révolution il existe deux points P, Q, symétriques par rapport au centre de l'ellipsoïde, et tels que la somme des carrés des distances de ces deux points à un plan tangent quelconque est égale à $2a^2$.

Un ellipsoïde étant donné, cherchons trois points fixes tels que la somme des carrés de leurs distances à un plan tangent quelconque à l'ellipsoïde soit égale à une constante K^2; on trouve, facilement, les conditions

$$\begin{aligned} x'+x''+x'''&=0, & \Sigma x'y'&=0,\\ y'+y''+y'''&=0, & \Sigma x'z'&=0,\\ z'+z''+z'''&=0, & \Sigma y'z'&=0, \end{aligned}$$

et, en posant

$$\Sigma x'^2 = A, \qquad \Sigma y'^2 = B, \qquad \Sigma z'^2 = C,$$

on trouve

$$A + 3a^2 = B + 3b^2 = C + 3c^2 = K^2.$$

D'autre part, le déterminant

$$\begin{vmatrix} x' & x'' & x''' \\ y' & y'' & y''' \\ z' & z'' & z''' \end{vmatrix}$$

est, évidemment, nul; donc son carré est nul; or, ce carré n'est autre que A, B, C.

On a donc

$$A, \quad B, \quad C = 0.$$

Par suite, les trois points, s'ils existent, sont dans l'un des plans principaux de l'ellipsoïde.

Soit, par exemple, $A = 0$, d'où $x' = x'' = x''' = 0$. On a alors

$$\begin{aligned} y'+\ y''+\ y''' &= 0,\\ z'+\ z''+\ z''' &= 0,\\ y'z'+y''z''+y'''z''' &= 0,\\ y'^2+\ y''^2+\ y'''^2 &= B,\\ z'^2+\ z''^2+\ z'''^2 &= C. \end{aligned}$$

L'élimination de y'', y''', z'', z''' donne pour le lieu du point $x'y'$ et, par symétrie, des deux autres points, la conique

$$\frac{y^2}{\frac{2B}{3}} + \frac{z^2}{\frac{2C}{3}} = 1,$$

et l'on a

$$B = K^2 - 3b^2 = 3a^2 - 3b^2,$$
$$C = K^2 - 3c^2 = 3a^2 - 3c^2,$$
$$K^2 = 3a^2.$$

On peut donc dire qu'il existe, dans le plan des yz, trois points fixes P, Q, R tels que la somme des carrés de leurs distances à un plan tangent quelconque est constante. On peut remplacer le système de ces trois points par une infinité d'autres systèmes; chacun d'eux est constitué par les sommets d'un triangle semi-régulier inscrit dans la conique

$$\frac{y^2}{2(a^2 - b^2)} + \frac{z^2}{2(a^2 - c^2)} = 1.$$

Résultats analogues pour les deux autres plans principaux de l'ellipsoïde.

Des considérations du même genre conduisent encore au résultat suivant : *Sur les axes d'un ellipsoïde on peut trouver six points, deux à deux symétriques par rapport au centre, et tels que la somme des carrés de leurs distances à un plan tangent quelconque est constante.*

Appelons d^2, d'^2, d''^2, les carrés des distances de ces points au centre, et K^2 la constante, on trouve

$$d^2 + 2a^2 = d'^2 + 2b^2 = d''^2 + 2c^2 = \frac{K^2}{2}.$$

Donc, pour une valeur donnée K^2, le problème a une solution; si K^2 n'est pas donné, le problème a une simple infinité de solutions. On peut évidemment chercher, de même que nous l'avons fait en Géométrie plane, des points fixes tels que les distances de ces points à un plan tangent quelconque soient liées par la relation

$$\alpha_2\delta_1^2 + \alpha_2\delta_2^2 + \ldots + \alpha_n\delta_n^2 = K^2,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, K^2 étant des constantes.