NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. JABLONSKI

Sur la distribution des nombres premiers absolus

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 18 (1918), p. 361-372

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__361_0>

[19]

SUR LA DISTRIBUTION DES NOMBRES PREMIERS ABSOLUS;

PAR M. E. JABLONSKI,
Professeur honoraire au Lycée Saint-Louis.

1. La suite des nombres premiers absolus

$$a_1,\quad a_2,\quad \ldots,\quad a_n \qquad (a_1 = 2,\ a_2 = 3,\ \ldots),$$

rangés par ordre de grandeurs croissantes, étant supposée connue il existe un nombre premier absolu a_{n+1} bien déterminé qui suit immédiatement a_n, on peut donc dire qu'il est fonction des nombres de cette suite. On ne connaît pas de relation algébrique ou transcendante entre a_{n+1} et a_1, a_2, ..., a_n donnant explicitement ou même implicitement a_{n+1}, il n'est même pas certain qu'une pareille relation existe; mais, en arithmétique, la loi de dépendance peut prendre une autre forme, celle d'une règle de calculs permettant de déduire le nombre inconnu d'un nombre donné ou de plusieurs nombres donnés. Telles sont, par exemple, celles qui donnent la racine carrée à une unité près d'un nombre connu, ou le quotient à une unité près de deux nombres connus. C'est une pareille règle que je me suis proposé d'établir pour le calcul de a_{n+1}, sans tâtonnements, en supposant connus a_1, a_2, ..., a_n. La méthode repose sur le théorème suivant :

Le plus petit nombre entier, autre que l'unité, premier avec le produit $N = a_1 . a_2 \ldots . a_n$, *de tous* *les nombres premiers absolus jusqu'à a_n, est le nombre premier absolu qui suit immédiatement a_n.*

Il n'y a pas de nombre entier, autre que l'unité, moindre que a_n et premier avec N, car tout nombre moindre que a_n et autre que l'unité est, ou l'un des nombres premiers absolus qui précèdent a_n, ou divisible par l'un au moins d'entre eux et, par conséquent, il n'est pas premier avec N. Mais il y a une infinité de nombres entiers supérieurs à a_n et premiers avec N : ce sont tous les nombres premiers absolus supérieurs à a_n dont la suite est illimitée, ou tous les nombres non premiers décomposables en facteurs premiers supérieurs à a_n et dont la suite est aussi illimitée. Il y en a un, a_{n+1}, inférieur à tous les autres et différent de l'unité; je dis qu'il est le nombre premier absolu qui suit immédiatement a_n.

En effet, d'abord a_{n+1} est premier absolu, car sinon il admettrait un diviseur premier absolu b moindre que lui mais supérieur à a_n, sans quoi a_{n+1} ne serait pas premier avec N. Ce nombre b, premier absolu, serait aussi premier avec N et, par suite, a_{n+1} ne serait pas le plus petit nombre entier, autre que l'unité, premier avec N, ce qui est contraire à l'hypothèse. D'autre part, pour les mêmes raisons, il n'y a pas de nombre premier absolu supérieur à a_n et moindre que a_{n+1}, donc a_{n+1} est bien le nombre premier absolu qui suit immédiatement a_n.

2. *Le nombre a_{n+1}, précédemment défini, est moindre que* N. — En effet, il y a au moins un nombre premier avec N autre que l'unité et moindre que N, à savoir N — 1. Il y a exception pour

$$n = 1, \quad \text{d'où} \quad N - 1 = 1,$$

ce cas est sans intérêt et nous supposerons par la suite

$$n \geqq 2, \quad \text{d'où} \quad N \geqq 6.$$

Il peut arriver qu'il n'y en ait pas d'autre, mais, en général, il y en a plusieurs; la méthode développée plus loin permet de le reconnaître et, dans tous les cas, de calculer le plus petit d'entre eux qui est le nombre cherché a_{n+1}.

3. Soit $\tang \alpha = \beta$, β étant un nombre donné à volonté; l'équation algébrique et entière de degré N qui donne les N valeurs de $\tang\left(\frac{\alpha}{N}\right)$ est

$$(1) \quad \beta\left[1 - C_N^2 \tang^2\left(\frac{\alpha}{N}\right) + C_N^4 \tang^4\left(\frac{\alpha}{N}\right) - \ldots\right] - \left[N \tang\left(\frac{\alpha}{N}\right) - C_N^3 \tang^3\left(\frac{\alpha}{N}\right) + \ldots\right] = 0,$$

C_N^q désignant, suivant l'usage, le nombre des combinaisons simples de N objets distincts de q à q. Si l'on appelle α' le plus petit, en valeur absolue, des arcs dont la tangente est β, on a

$$\alpha = K\pi + \alpha',$$

et les N solutions de (1) sont données par la formule

$$\tang\left(\frac{K\pi}{N} + \frac{\alpha'}{N}\right),$$

où l'entier K prend successivement toutes les valeurs $0, 1, 2, \ldots, N-1$.

Si l'on fait $\beta = 0$, il s'ensuit $\alpha' = 0$ et les N racines de (1) sont de la forme $\tang\left(\frac{K\pi}{N}\right)$. L'équation (1) se réduit alors à

$$(2)\quad N\tan\left(\frac{\alpha}{N}\right) - C_N^3\tan^3\left(\frac{\alpha}{N}\right) + C_N^5\tan^5\left(\frac{\alpha}{N}\right) + \ldots + (-1)^{\frac{N-2}{2}} C_N^{N-1}\tan^{N-1}\left(\frac{\alpha}{N}\right) = 0;$$

elle est seulement de degré $N-1$, parce que N étant pair, la racine de (1) correspondant à $K=\frac{N}{2}$ est infinie; elle s'abaisse encore au degré $N-2$ par la suppression du facteur commun $\tan\left(\frac{\alpha}{N}\right)$ qui répond à la racine simple nulle donnée par $K=0$. Les autres racines finies et non nulles sont deux à deux opposées, pour $\beta=0$, car, aux valeurs p et $N-p$ de l'indice K, répondent deux racines dont les arguments ont une somme égale à π, quel que soit p (sauf $p=0$ et $p=N$). Donc, après suppression du facteur $\tan\left(\frac{\alpha}{N}\right)$, le premier membre de (2) ne contient plus que des puissances paires de $\tan\left(\frac{\alpha}{N}\right)$ et si l'on pose $x=\tan^2\left(\frac{\alpha}{N}\right)$ on est conduit à l'équation

$$(3)\qquad N - C_N^3 x + C_N^5 x^2 - \ldots + (-1)^{\frac{N-2}{2}} C_N^{N-1} x^{\frac{N-2}{2}} = 0$$

ou $f(x)=0$, rationnelle et entière en x. Les racines de cette équation (3) sont toutes réelles, positives, distinctes, de la forme $\tan^2\left(\frac{p\pi}{N}\right)$ où p prend toutes les valeurs entières $1, 2, 3, \ldots, \frac{N-2}{2}$. Leurs valeurs sont rangées dans le même ordre que leurs indices, puisque tous les arguments sont moindres que $\frac{\pi}{2}$.

4. Posons

$$N_1 = \frac{N}{a_1}, \qquad N_2 = \frac{N}{a_2}, \qquad \ldots, \qquad N_n = \frac{N}{a_n},$$

tous ces nombres sont entiers, le premier impair, tous les autres pairs. Si l'on fait toujours $\operatorname{tang}(\alpha) = \beta$, puis $\beta = 0$, les équations qui donnent les valeurs de

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\alpha}{N_1}\right), \quad \operatorname{tang}\left(\frac{\alpha}{N_2}\right), \quad \ldots, \quad \operatorname{tang}\left(\frac{\alpha}{N_n}\right)$$

se déduisent de (2) par les changements respectifs de N en $N_1, N_2, \ldots, N_n$.

Pour N_1, qui est impair, si l'on pose

$$x = \operatorname{tang}^2\left(\frac{\alpha}{N_1}\right),$$

après suppression du facteur $\operatorname{tang}\left(\frac{\alpha}{N_1}\right)$, on a

$$(4) \quad f_1(x) \equiv N_1 - C_{N_1}^3 x + C_{N_1}^5 x^2 + \ldots + (-1)^{\frac{N_1-1}{2}} C_{N_1}^{N_1} x^{\frac{N_1-1}{2}} = 0.$$

Pour $N_2, N_3, \ldots, N_n$ qui sont pairs, si l'on pose

$$x = \operatorname{tang}^2\left(\frac{\alpha}{N_2}\right) \text{ ou } \operatorname{tang}^2\left(\frac{\alpha}{N_3}\right) \cdots \text{ ou } \operatorname{tang}^2\left(\frac{\alpha}{N_n}\right),$$

on a les équations

$$(5) \quad f_2(x) = 0, \qquad f_3(x) = 0, \qquad \ldots, \qquad f_n(x) = 0$$

qui se déduisent de (3) par les changements respectifs de N en $N_2, N_3, \ldots N_n$. Toutes ces équations (3), (4), (5) sont rationnelles et entières en x et ont des coefficients numériques entiers qu'on sait calculer quand on connaît la suite $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

5. J'appelle *racine première* de (3) toute racine

$$\operatorname{tang}^2\left(\frac{p\pi}{N}\right) \qquad \left(p = 1, 2, \ldots, \frac{N-2}{2}\right),$$

où l'indice p est premier avec N. Il est aisé de voir que toute racine première de (3) n'appartient à aucune des équations (4) et (5) et que toute racine non première de (3) appartient à l'une au moins de ces équations. Donc, par de simples divisions algébriques, on sait former une nouvelle équation algébrique et entière en x, à coefficients numériques entiers admettant pour racines toutes les racines premières de (3) et rien que celles-là. Soit

$$(6) \qquad \varphi(x) = 0,$$

cette équation.

Elle a pour plus petite racine en valeur absolue $\tan^2\left(\frac{\pi}{N}\right)$ qui répond à $p = 1$ et que je désignerai par h $\left(\text{pour } n \geqq 2,\ h \leqq \frac{1}{3}\right)$. La plus grande racine répond à une valeur de K, moindre que $\frac{N-2}{2}$, qui est entier pair et par conséquent non premier avec N. Trois cas peuvent se présenter.

Premier cas. — *L'équation* (6) *est du premier degré en x.* — Cela veut dire que la seule racine première de (3) est h, ou que le seul nombre premier avec N et moindre que $\frac{N-2}{2}$ est l'unité. Mais, à l'unique racine h de (6), c'est-à-dire à l'unique racine première de (2), correspondent deux valeurs de K, à savoir 1 et $N-1$; il en résulte que le plus petit nombre premier avec N et autre que l'unité est $N-1$, c'est le nombre a_{n+1} cherché.

Ce cas se présente, par exemple, pour $n = 2$ ou $N = 6$; le nombre premier absolu a_3, qui suit immédiatement a_2 ou 3, est bien $N-1$ ou 5.

Deuxième cas. — *L'équation* (6) *est du second* *degré en* x. — Elle admet toujours pour plus petite racine le nombre h qui répond à $p = 1$; l'autre racine x_1 correspond à l'unique indice p_1 autre que l'unité, premier avec N et moindre que $\frac{N-2}{2}$; c'est le nombre cherché a_{n+1}. On sait calculer x_1 et, au besoin, $\frac{1}{x_1}$ avec telle approximation que l'on veut. Or, on a

$$x_1 = \operatorname{tang}^2\left(\frac{a_{n+1}\pi}{N}\right);$$

donc

$$(7) \qquad a_{n+1} = \frac{N}{\pi}\,\overline{\operatorname{arc}}\operatorname{tang}\sqrt{x_1},$$

cet arc étant le plus petit positif répondant à la tangente $\sqrt{x_1}$. Il est facile à calculer avec telle approximation que l'on veut, quand x_1 est connu avec une approximation suffisante. (Je n'insiste pas sur ces questions classiques.)

Si $x_1 < 1$, on a

$$(8) \left\{ \begin{array}{l} \overline{\operatorname{arc}}\operatorname{tang}\sqrt{x_1} = \displaystyle\sum_{t=0}^{t=+\infty} (-1)^t \frac{x_1^{\frac{2t+1}{2}}}{2t+1} = \sqrt{x_1}\sum_{t=0}^{t=+\infty}(-1)^t\frac{x_1^t}{2t+1} \\ \qquad\qquad (t \text{ entier positif}); \end{array} \right.$$

Si $x_1 > 1$, on a

$$(9) \qquad \begin{aligned} \overline{\operatorname{arc}}\operatorname{tang}\sqrt{x_1} &= \frac{\pi}{2} - \sum_{t=0}^{t=+\infty}(-1)^t \frac{\left(\frac{1}{x_1}\right)^{\frac{2t+1}{2}}}{2t+1} \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{x_1}}\sum_{t=0}^{t=+\infty}(-1)^t\frac{\left(\frac{1}{x_1}\right)^t}{2t+1}. \end{aligned}$$

Ces deux séries sont convergentes.

Le cas de $x_1 = 1$ est impossible, car il s'ensuivrait

$$a_{n+1} = \frac{N}{\pi} \times \frac{\pi}{4} = \frac{N}{4},$$

qui est fractionnaire. On peut donc calculer a_{n+1} avec telle approximation que l'on veut. Il suffit de le calculer à l'unité près. En effet, soient E la partie entière et f la fraction complémentaire positive données par le calcul; le nombre entier cherché a_{n+1} est E ou E + 1, mais, sur ces deux entiers consécutifs, l'un est pair et, par suite, à rejeter, l'autre est la valeur de a_{n+1}.

Troisième cas (cas général). — *L'équation* (6) *est d'un degré* $i+1$ *supérieur ou égal à* 3. — Il y a alors plus d'un indice p, autre que l'unité, premier avec N et moindre que $\frac{N-2}{2}$; soit p_1 le plus petit qui est le nombre cherché a_{n+1}. Il correspond à la racine x_1 de (6) qui suit immédiatement la racine $\tang^2\left(\frac{\pi}{N}\right)$ ou h, qui est connu et qu'on peut calculer directement avec telle approximation que l'on veut.

Cela posé, les racines de (6) étant, dans l'ordre de grandeurs croissantes $h, x_1, x_2, \ldots, x_i$, toutes réelles, positives, distinctes et inférieures à $\tang^2\left(\frac{N-2}{2}\frac{\pi}{N}\right)$ ou $\frac{1}{h}$, proposons-nous de calculer x_1 ou $\frac{1}{x_1}$ et, au besoin, tous les deux, avec telle approximation que l'on voudra. Soit $\varphi'(x)$ la dérivée première de $\varphi(x)$ par rapport à x; on a

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{1}{x-h} + \frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-x_2} + \ldots + \frac{1}{x-x_i}.$$

Il est permis, dans cette identité, de supposer

$$\operatorname{mod} x < h;$$

alors le second membre est développable en série convergente procédant suivant les puissances croissantes de x, à exposants entiers et positifs, dont le terme général est

$$-x^m\left[\frac{1}{h^{m+1}}+\frac{1}{x_1^{m+1}}+\frac{1}{x_2^{m+1}}+\ldots+\frac{1}{x_i^{m+1}}\right].$$

D'autre part, si l'on effectue la division indiquée dans le premier membre en l'ordonnant par rapport aux puissances croissantes de x, on a

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}=\sum_{m=0}^{m=+\infty}\mathrm{A}_m x^m,$$

A_m est une fraction numérique rationnelle donnée par le calcul de la division. Il s'ensuit

$$-\mathrm{A}_m=\frac{1}{h^{m+1}}+\frac{1}{x_1^{m+1}}+\frac{1}{x_2^{m+1}}+\ldots+\frac{1}{x_i^{m+1}},$$

d'où l'on tire aisément

$$(10)\quad h\frac{\mathrm{A}_{m-1}h^m+1}{\mathrm{A}_m h^{m+1}+1}=x_1\frac{1+\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^m+\ldots+\left(\frac{x_1}{x_i}\right)^m}{1+\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{m+1}+\ldots+\left(\frac{x_1}{x_i}\right)^{m+1}}.$$

Chacune des fractions $\frac{x_1}{x_2}, \ldots, \frac{x_1}{x_i}$ étant moindre que l'unité, il en résulte que, lorsque m croît indéfiniment par valeurs positives, on a

$$h\lim\frac{\mathrm{A}_{m-1}h^m+1}{\mathrm{A}_m h^{m+1}+1}=x_1.$$

Si l'on pose

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^m+\ldots+\left(\frac{x_1}{x_i}\right)^m=\varepsilon_m,$$

comme toutes les fractions sont positives, on a

$$\varepsilon_{m+1} < \varepsilon_m;$$

donc, quel que soit $m > 0$,

$$h\frac{A_{m-1}h^m + 1}{A_m h^{m+1} + 1} > x_1.$$

Il s'agit de déduire de (10) le calcul de x_1, ou de $\frac{1}{x_1}$, ou de tous les deux, avec telle approximation que l'on voudra; l'examen attentif de la question montre que, pour le succès de cette recherche, il convient de commencer par $\frac{1}{x_1}$. De (10) on tire

$$\frac{1}{h}\frac{A_m h^{m+1} + 1}{A_{m-1}h^m + 1} = \frac{1}{x_1}\frac{1 + \varepsilon_{m+1}}{1 + \varepsilon_m},$$

d'où

$$(10') \qquad \frac{1}{x_1} - \frac{1}{h}\frac{A_m h^{m+1} + 1}{A_{m-1}h^m + 1} = \frac{1}{x_1}\frac{\varepsilon_m - \varepsilon_{m+1}}{1 + \varepsilon^m} > 0.$$

Il est nécessaire, tout d'abord, de savoir assigner l'entier m', le plus petit de préférence, tel que sous la seule condition $m \geqq m'$, le premier membre de (10') reste moindre qu'un nombre donné positif ε, aussi petit que l'on voudra.

Soit Δ ce premier membre, on a visiblement

$$\Delta < \frac{1}{x_1}\frac{\varepsilon_m}{1 + \varepsilon_m} < \frac{1}{h}\frac{\varepsilon_m}{1 + \varepsilon_m};$$

donc, pour que $\Delta < \varepsilon$, il suffit que

$$\frac{1}{h}\frac{\varepsilon_m}{1 + \varepsilon_m} < \varepsilon,$$

d'où

$$\varepsilon_m < \frac{h\varepsilon}{1 - h\varepsilon} \text{ ou } \varepsilon',$$

nombre positif si $\varepsilon < 3$, ce qu'on peut supposer.

Mais les indices $p_2, p_3, \ldots, p_i$ tous premiers avec N des racines $x_2, x_3, \ldots, x_i$ de l'équation (6) sont tous supérieurs à $p_1 + 1$ qui est pair et, par conséquent, non premier avec N; il en résulte que toutes ces racines sont supérieures à $\tang^2\left[\frac{(p_1+1)\pi}{N}\right]$ et, par conséquent, que

$$\varepsilon_m < (i-1)\left\{\frac{\tang\left(\frac{p_1\pi}{N}\right)}{\tang\left[\frac{(p_1+1)\pi}{N}\right]}\right\}^{2m};$$

d'autre part,

$$\frac{\tang\left(\frac{p_1\pi}{N}\right)}{\tang\left[\frac{(p_1+1)\pi}{N}\right]} = \frac{\tang\left(\frac{p_1\pi}{N}\right)\left[1-\tang\left(\frac{p_1\pi}{N}\right)\tang\left(\frac{\pi}{N}\right)\right]}{\tang\left(\frac{p_1\pi}{N}\right)+\tang\left(\frac{\pi}{N}\right)}$$

$$< \frac{\tang\left(\frac{p_1\pi}{N}\right)}{\tang\left(\frac{p_1\pi}{N}\right)+\tang\frac{\pi}{N}}$$

$$< \frac{\tang\left[\frac{(N-2)}{2}\frac{\pi}{N}\right]}{\tang\left(\frac{N-2}{2}\frac{\pi}{N}\right)+\tang\frac{\pi}{N}}$$

ou enfin

$$< \frac{1}{1+h};$$

on a donc

$$\varepsilon_m < (i-1)\frac{1}{(1+h)^{2m}};$$

par suite, pour que $\Delta < \varepsilon$, il suffit que

$$(1+h)^{2m} \geqq \frac{i-1}{\varepsilon'},$$

d'où il est facile de déduire m'.

Cela posé, si l'on veut avoir $\frac{1}{x_1}$ à θ près $(6 > \theta > 0)$, il suffira de faire $\varepsilon = \frac{\theta}{2}$, puis, ayant déterminé m', on calculera h avec une approximation suffisante pour que, h' étant sa valeur approchée, la différence

$$\frac{1}{h}\frac{A_{m'}h^{m'+1}+1}{A_{m'-1}h^{m'}+1} - \frac{1}{h'}\frac{A_m h'^{m'+1}+1}{A_{m'-1}h'^{m'}+1}$$

soit, en valeur absolue, moindre que $\frac{\theta}{2}$, ce qu'on sait faire. Le second terme de cette différence sera alors, quels que soient les sens des erreurs commises, la valeur approchée de $\frac{1}{x_1}$ à θ près.

Le calcul de p_1 ou a_{n+1} s'achève comme dans le deuxième cas. Soit l la valeur approchée de $\frac{1}{x_1}$ précédemment calculée.

Si $l < 1$, on emploiera la formule (9) en y remplaçant $\frac{1}{x_1}$ par l, et il sera inutile de calculer x_1.

Si $l > 1$, il faudra employer la formule (8) en y remplaçant x_1 par $\frac{1}{l}$.

Dans ces deux cas, il est clair qu'on peut supposer θ assez petit pour que a_{n+1}, donné par la formule (7), soit connu à l'unité près, ce qui suffit pour le déterminer complètement.

Le cas de $l = 1$ est à rejeter, car puisqu'on ne peut pas avoir rigoureusement $x_1 = 1$ (*voir* deuxième cas), on pourra toujours prendre θ assez petit pour qu'on ait $l \neq 1$.

En résumé, dans tous les cas possibles, on peut, par des opérations *régulières*, algébriques ou numériques en partant des nombres donnés $a_1, a_2, \ldots, a_n$, calculer a_{n+1} directement tout aussi bien que si nous connaissions une équation entre cette inconnue et ces données. C'est ce que nous nous proposions d'établir.